RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 giugno 1916.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle derivate delle isomerie vettoriali.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Le isomerie vettoriali [1] si presentano tutte le volte che vi è da considerare un moto di corpo rigido, una flessione di superfici inestendibili [2], una rappresentazione conforme, ecc.; e, quindi, le loro derivate rispetto al tempo o al punto del quale sono funzioni, divengono elementi indispensabili nel calcolo vettoriale assoluto. Credo quindi opportuno di pubblicare le formule che dànno queste derivate, e che, eccettuata la [1], sono nuove; tanto più che le isomerie vettoriali permettono di abolire del tutto i *due sistemi di assi*, *fisso* l'uno e *mobile* l'altro, insieme coi moti relativi [3] che nulla hanno a che fare con le questioni che si trattano, dovendosi solo considerare o *composizioni di moti*, o moti *ausiliari* di corpo rigido.

Conservo le notazioni della mia Memoria citata in principio. Essendo λ una qualsiasi isomeria vettoriale, si ha

$$\lambda = \cos\varphi + (\mathrm{I}_3\lambda - \cos\varphi)\,\mathrm{H}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \operatorname{sen}\varphi \cdot \mathbf{u}\wedge,$$

[1] C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale* (che indicheremo brevemente con A. V. G.), vol. I (Mattei, Pavia, 1912); C. Burali-Forti, *Isomerie vettoriali e moti geometrici* (Memorie R. Acc. di Torino, ser. II, vol. LXV, n. 14, adunanza del 27 dicembre 1914).

[2] M. Bottasso, *Sulla flessione delle superfici inestendibili* (Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXIV, ser. 5ª, 2° sem., pp. 174-182, 1915).

[3] Cfr. A. V. G., vol. I, II; M. Bottasso, A. V. G., vol. IV. In questi libri i moti relativi sono del tutto eliminati. Cfr. anche le mie Note: *Ingranaggi piani* (Atti R. Acc. Torino, 1902); *Sul moto di un corpo rigido* (idem, 1903); *Sul moto composto* (idem, 1912).

ove φ è numero reale ed $\mathbf{u}$ vettore unitario. In particolare

$$\lambda = \text{Rotor}(\varphi, \mathbf{u}) \quad \text{ovvero} \quad \lambda = \text{a Rotor}(\varphi, \mathbf{u}),$$

secondo che $I_3\lambda = 1$ ovvero $I_3\lambda = -1$. Dai Rotor derivano i *moti fisici* di corpo rigido; dagli a-Rotor (anti-rotor) derivano dei moti geometrici non realizzabili fisicamente.

Rotor *funzione di un numero.*

L'isomeria vettoriale, ad invariante terzo positivo,

$$\lambda = \text{Rotor}(\varphi, \mathbf{u}),$$

sia funzione del numero reale t, e si indichino con gli apici le derivate rispetto a t.

Esistono i vettori Ω, Ω_1, funzioni di t, tali che

[1] $$\lambda' = \Omega\wedge \quad , \quad \mathrm{K}\lambda' = \Omega_1\wedge\mathrm{K}\lambda \ (^1),$$

legati, insieme colle loro derivate, dalle relazioni

[2] $$\Omega_1 = -\mathrm{K}\lambda\Omega \quad , \quad \Omega = -\lambda\Omega_1$$

[3] $$\Omega_1' = -\mathrm{K}\lambda\Omega' \quad , \quad \Omega' = -\lambda\Omega_1'$$

ed esprimibili mediante φ ed $\mathbf{u}$ sotto la forma

[4] $$\Omega = \varphi'\mathbf{u} + \operatorname{sen}\varphi\,.\,\mathbf{u}' + (1-\cos\varphi)\,\mathbf{u}\wedge\mathbf{u}'$$

[4′] $$\Omega_1 = -\varphi'\mathbf{u} - \operatorname{sen}\varphi\,.\,\mathbf{u}' + (1-\cos\varphi)\,\mathbf{u}\wedge\mathbf{u}',$$

la seconda delle quali si ottiene dalla prima cambiando φ in $-\varphi$, precisamente come $\mathrm{K}\lambda = \lambda^{-1}$ si ottiene da λ cambiando φ in $-\varphi$ (²).

(¹) Alle quali, per essere $\lambda\,.\,\mathrm{K}\lambda = \mathrm{K}\lambda\,.\,\lambda = 1$, si può dare la forma

$$\lambda'\,.\,\mathrm{K}\lambda = \Omega\wedge \quad , \quad \mathrm{K}\lambda'\,.\,\lambda = \Omega_1\wedge,$$

ovvero

$$\Omega = \mathrm{V}(\lambda'\,.\,\mathrm{K}\lambda) \quad , \quad \Omega_1 = \mathrm{V}(\mathrm{K}\lambda'\,.\,\lambda).$$

(²) Se, essendo λ un Rotor, e solo in tale ipotesi, si conviene di indicare con $\lambda^{\frac{1}{2}}$ il Rotor il cui quadrato è λ, allora $\lambda^{\frac{1}{2}} = \text{Rotor}(\varphi/2, \mathbf{u})$, e si ha

$$\Omega = \varphi'\mathbf{u} + 2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\,\lambda^{\frac{1}{2}}\,\mathbf{u}'$$

e formula analoga per Ω_1. Si hanno pure le formule notevoli

$$1-\lambda = -2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\cdot\lambda^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbf{u}\wedge = -2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\mathbf{u}\wedge\lambda^{\frac{1}{2}}$$

$$1+\lambda = 2\cos\frac{\varphi}{2}\,\lambda^{\frac{1}{2}} + 2\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{H}(\mathbf{u},\mathbf{u})$$

$$(1+\lambda)^{-1} = \frac{1}{2}\left\{1 - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\mathbf{u}\wedge\right\} \quad \text{per } 1+\lambda \text{ invertibile}$$

$$(\mathrm{C}\lambda)^{-1} = \frac{1}{2\cos\varphi}\left\{1 - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{1+\cos\varphi}\cdot\mathbf{u}\wedge\right\} \quad \text{pure per } \mathrm{C}\lambda \text{ invertibile,}$$

e quest'ultima si ottiene dalla formula generale, per α omografia,

$$(\mathrm{C}\alpha)^{-1} = \{\mathrm{I}_1\alpha\,.\,\alpha + \mathrm{RK}\alpha\}\,/\,\{\mathrm{I}_1\alpha\,.\,\mathrm{I}_2\alpha - \mathrm{I}_3\alpha\}.$$

Se n è un intero non nullo, positivo o negativo, allora λ^n . $K\lambda^n$ sono pure dei Rotor che si ottengono, rispettivamente, da Rotor$(\varphi\,.\,\mathbf{u})$ cambiando φ in $n\varphi$ ovvero $-n\varphi$. In virtù della [1] devono dunque esistere i vettori $\Omega^{(n)}$, $\Omega_1^{(n)}$, tali che

$$[1'] \qquad (\lambda^n)' = \Omega^{(n)} \wedge \lambda^n \quad , \quad (K\lambda^n)' = \Omega_1^{(n)} \wedge K\lambda^n .$$

La relazione tra i vettori $\Omega^{(n)}$, $\Omega_1^{(n)}$ e i vettori Ω, Ω_1 è data, per n *positivo*, da

$$[5] \quad \Omega^{(n)} = (1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-1})\,\Omega \quad , \quad \Omega_1^{(n)} = (1 + K\lambda + \cdots + K\lambda^{n-1})\,\Omega_1 ,$$

ovvero, operando nei due membri con $1 - \lambda$ e $1 - K\lambda$,

$$[5'] \qquad (1 - \lambda)\,\Omega^{(n)} = (1 - \lambda^n)\,\Omega \quad , \quad (1 - K\lambda)\,\Omega_1^{(n)} = (1 - K\lambda^n)\,\Omega_1 .$$

Inoltre, ricordando che $K\lambda = \lambda^{-1}$, per n positivo o negativo si ha subito, dalle [1'],

$$(6) \qquad \Omega^{(-n)} = \Omega_1^{(n)} \quad , \quad \Omega_1^{(-n)} = \Omega^{(n)} .$$

Dim. [1]. — Esse sono già note [1] e dimostrate in modo assai semplice. Un'altra dimostrazione, comunicatami dal prof. T. Boggio, è questa: Derivando la condizione $\lambda\,.\,K\lambda = 1$, si ha

$$\lambda'\,.\,K\lambda + \lambda\,.\,K\lambda' = 0 \quad , \quad \lambda'\,.\,K\lambda + K(\lambda'\,.\,K\lambda) = 0$$

la quale prova che $\lambda'\,.\,K\lambda$ è *omografia assiale*, cioè della forma $\Omega\wedge$.

Lo stesso prof. Boggio mi ha fatto notare che dalla prima delle [1] risulta immediatamente il teorema fondamentale del moto di corpo rigido. Invero, se i punti P, Q sono le posizioni al tempo t, dei punti iniziali P_0, Q_0, allora

$$P - Q = \lambda(P_0 - Q_0) ;$$

derivando si ha, per la [1],

$$P' - Q' = \Omega\wedge\lambda(P_0 - Q_0) \quad , \quad P' - Q' = \Omega\wedge(P - Q) .$$

Inoltre giova pure osservare che la prima delle [1] dà sotto forma assoluta semplicissima, e con formula *unica*, le *nove* equazioni del Poisson che esprimono le derivate dei coseni direttori degli assi mobili rispetto agli assi fissi [2].

Dim. [2]. — Ricordando che $R\lambda = \lambda$, dalla prima delle [1] si ha

$$K\lambda'\mathbf{a} = -K\lambda(\Omega\wedge\mathbf{a}) = -RK\lambda(\Omega\wedge\mathbf{a}) = -(K\lambda\Omega)\wedge K\lambda\mathbf{a}$$

[1] A Signorini, *Sulla dinamica dell'elettrone* (Nuovo Cimento, ser. VI, vol IV, fasc ott. e nov. 1912).

[2] Anche da ciò può risultare l'assoluta inutilità degli assi fissi e mobili.

che, per essere $\mathbf{a}$ vettore arbitrario, dà $K\lambda' = -(K\lambda\Omega)_\wedge K\lambda$; e, per la seconda delle [1], si ha la [2].

Dim. [3]. — Derivando la [2] si ha

$$\Omega_1' = -K\lambda\Omega' - K\lambda'\Omega = -K\lambda\Omega' - \Omega_{1\wedge}K\lambda\Omega = -K\lambda\Omega' + \Omega_{1\wedge}\Omega_1 .$$

Dim. [4]. — Applicando la [1] ad $\mathbf{u}$, e ricordando che $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{u}$, si ha $\lambda'\mathbf{u} = \Omega_\wedge\mathbf{u}$. Operando con $\mathbf{u}_\wedge$ nei due membri, ed osservando che da $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{u}$ segue $\lambda'\mathbf{u} = \mathbf{u}' - \lambda\mathbf{u}'$, si ha subito

$$\Omega - \mathbf{u}\times\Omega\,.\,\mathbf{u} = \mathbf{u}_\wedge\lambda'\mathbf{u} = \mathbf{u}_\wedge(\mathbf{u}' - \lambda\mathbf{u}') = \\ = \mathbf{u}_\wedge\{(1-\cos\varphi)\,\mathbf{u}' - \operatorname{sen}\varphi\,.\,\mathbf{u}_\wedge\mathbf{u}'\},$$

tenuto anche conto che, per essere $\mathbf{u}$ unitario, $\mathbf{u}\times\mathbf{u}' = 0$; da questa si ha

$$(a) \qquad \Omega = \mathbf{u}\times\Omega\,.\,\mathbf{u} + \operatorname{sen}\varphi\,.\,\mathbf{u}' + (1-\cos\varphi)\,\mathbf{u}_\wedge\mathbf{u}' .$$

Resta da calcolare $\mathbf{u}\times\Omega$. È noto (mia Memoria, loc. cit.) che

$$\lambda' = \varphi'\,.\,\mathbf{u}_\wedge\lambda + 2(1-\cos\varphi)\,DH(\mathbf{u}\,,\mathbf{u}) + \operatorname{sen}\varphi\,.\,\mathbf{u}'_\wedge ,$$

da cui si ha

$$2V\lambda' = \varphi' C\lambda\mathbf{u} + 2\operatorname{sen}\varphi\;\;\mathbf{u}' ;$$

ma dalla [1] si ha $2V\lambda' = C\lambda\Omega$, e quindi

$$(b) \qquad C\lambda\Omega = \varphi' C\lambda\mathbf{u} + 2\operatorname{sen}\varphi\,.\,\mathbf{u}' .$$

Moltiplicando $(\times)$ per $\mathbf{u}$, si ha

$$C\lambda(\Omega - \varphi'\mathbf{u})\times\mathbf{u} = 0 \quad , \quad (\Omega - \varphi'\mathbf{u})\times CK\lambda\mathbf{u} = 0 ;$$

ma $CK\lambda\mathbf{u}$ è vettore (non nullo) parallelo ad $\mathbf{u}$ e quindi

$$(\Omega - \varphi'\mathbf{u})\times\mathbf{u} = 0 , \quad \text{cioè} \quad \Omega\times\mathbf{u} = \varphi'$$

il che dimostra la [4] (1).

(1) Da (b) si ha

$$\Omega = \varphi'\mathbf{u} + 2\operatorname{sen}\varphi\,.\,(C\lambda)^{-1}\mathbf{u}' ,$$

da cui, per la formula generale (citata) che dà $(C\alpha)^{-1}$, si ottiene ancora la [4] per $C\lambda$ invertibile.

Si può anche dimostrare la [4] senza far uso della forma esplicita di λ'. Si ha $V\lambda = \operatorname{sen}\varphi\,.\,\mathbf{u}$, e quindi $\mathbf{u}\times V\lambda = \operatorname{sen}\varphi$. Derivando e ricordando che $V\lambda$ è parallelo ad $\mathbf{u}$ (o è nullo) abbiamo

$$\varphi'\,.\cos\varphi = \mathbf{u}\times V\lambda' + \mathbf{u}'\times V\lambda = \mathbf{u}\times V\lambda' ;$$

ma da $2V\lambda' = C\lambda\Omega$ si ricava

$$2\varphi'\,.\cos\varphi = \mathbf{u}\times C\lambda\Omega = \Omega\times CK\lambda\mathbf{u} = 2\cos\varphi\,.\,\mathbf{u}\times\Omega ,$$

che, per $\cos\varphi \neq 0$, dà ancora $\mathbf{u}\times\Omega = \varphi'$.

Con queste due dimostrazioni occorre ancora verificare la [4] per $C\lambda$ non invertibile o per $\cos\varphi = 0$.

Dim. [5]. — Essendo $\mathbf{a}$ vettore arbitrario costante, ammessa la [5] per un valore positivo e non nullo di n, e ricordando che $\mathrm{R}\lambda = \lambda$, si ha

$$(\lambda^{n+1}\mathbf{a})' = (\lambda\,.\,\lambda^n\mathbf{a})' = \lambda(\Omega^{(n)} \wedge \lambda^n\mathbf{a}) + \Omega \wedge \lambda\,.\,\lambda^n\mathbf{a}$$
$$= \mathrm{R}\lambda(\Omega^{(n)} \wedge \lambda^n\mathbf{a}) + \Omega \wedge \lambda^{n+1}\mathbf{a} = (\lambda\Omega^{(n)}) \wedge \lambda^{n+1}\mathbf{a} + \Omega \wedge \lambda^{n+1}\mathbf{a}$$
$$= \{(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-1} + \lambda^n)\,\Omega\} \wedge \lambda^{n+1}\mathbf{a}\,.$$

Se, dunque, la [4] è vera per n, essa è pure vera per $n+1$; ma è vera per $n = 1$, e quindi è vera in generale.

Rotor *funzione di un punto.*

L'isomeria vettoriale $\lambda = \mathrm{Rotor}(\varphi\,,\mathbf{u})$ sia funzione del punto P variabile in un campo continuo a tre dimensioni.

Esistono le omografie vettoriali, funzioni pure di P, μ, μ_1, tali che

[7] $$d\lambda = (\mu\,d\mathrm{P}) \wedge \lambda \quad , \quad d\mathrm{K}\lambda = (\mu_1\,d\mathrm{P}) \wedge \mathrm{K}\lambda\,,$$

legate dalle relazioni

[8] $$\mu_1 = -\,\mathrm{K}\lambda\,.\,\mu \quad , \quad \mu = -\,\lambda\mu_1$$

e la cui forma effettiva mediante φ ed $\mathbf{u}$, che sono pure funzioni di P, è

[9] $$\mu = \mathrm{H}(\mathrm{grad}\,\varphi\,,\mathbf{u}) + \mathrm{sen}\,\varphi \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} + (1 - \cos\varphi)\,\mathbf{u} \wedge \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$$

[9′] $$\mu_1 = -\,\mathrm{H}(\mathrm{grad}\,\varphi\,,\mathbf{u}) - \mathrm{sen}\,\varphi \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} + (1 - \cos\varphi)\,\mathbf{u} \wedge \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\,.$$

Per n numero intero relativo non nullo, esistono le omografie vettoriali $\mu^{(n)}$, $\mu_1^{(n)}$ tali che

[7′] $$d\lambda^n = (\mu^{(n)}\,d\mathrm{P}) \wedge \lambda^n \quad , \quad d\mathrm{K}\lambda^n = (\mu_1^{(n)}\,d\mathrm{P}) \wedge \mathrm{K}\lambda^n\,,$$

poichè $\lambda^n = \mathrm{Rotor}(n\varphi\,,\mathbf{u})$, cioè λ^n e $\mathrm{K}\lambda^n$ sono pure dei Rotor.

Per n positivo, si ha

[10] $$\mu^{(n)} = (1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-1})\,\mu \;,\; \mu_1^{(n)} = (1 + \mathrm{K}\lambda + \cdots + \mathrm{K}\lambda^{n-1})\,\mu_1\,,$$

[10′] $$(1 - \lambda)\,\mu^{(n)} = (1 - \lambda^n)\,\mu \quad , \quad (1 - \mathrm{K}\lambda)\,\mu_1^{(n)} = (1 - \mathrm{K}\lambda^n)\,\mu_1\,.$$

Si hanno inoltre le formule

[11] $$\mathrm{K}\mu\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\varphi \quad , \quad \mathrm{K}\mu_1\mathbf{u} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$$

[12] $$\mathrm{Rot}\,\lambda = -\,(\mathrm{C}\mu)\,\lambda \quad , \quad \mathrm{Rot}\,(\mathrm{K}\lambda) = -\,(\mathrm{C}\mu_1)\,\mathrm{K}\lambda$$

[13] $$\mathrm{grad}\,\lambda = 2\lambda\mathrm{V}\mu_1 \quad , \quad \mathrm{grad}\,\mathrm{K}\lambda = 2\mathrm{K}\lambda\mathrm{V}\mu\,,$$

e per $\mathbf{x}$ vettore arbitrario, funzione di P o costante,

$$[14] \quad \frac{d\lambda}{dP}\mathbf{x} = (\mu\mathbf{x})\wedge\lambda \quad , \quad \frac{dK\lambda}{dP}\mathbf{x} = (\mu_1\mathbf{x})\wedge K\lambda$$

$$[14'] \quad \frac{d\lambda}{dP}\mathbf{x} = -\lambda\,.\,(\mu_1\mathbf{x})\wedge \quad , \quad \frac{dK\lambda}{dP}\mathbf{x} = -K\lambda\,.\,(\mu\mathbf{x})\wedge$$

$$[15] \quad \frac{d(\lambda\mathbf{x})}{dP} = \lambda\frac{d\mathbf{x}}{dP} - (\lambda\mathbf{x})\wedge\mu \quad , \quad \frac{d(K\lambda\mathbf{x})}{dP} = K\lambda\frac{d\mathbf{x}}{dP} - (K\lambda\mathbf{x})\wedge\mu_1 .$$

Dim. [7]-[10]. — Come per la [1], si prova che esiste un vettore Ω_0 funzione di P e di dP per il quale

$$d\lambda = \Omega_0\wedge\lambda ;$$

come per la [4], si prova che

$$\Omega_0 = d\varphi\,.\,\mathbf{u} + \operatorname{sen}\varphi\,.\,d\mathbf{u} + (1-\cos\varphi)\,\mathbf{u}\wedge d\mathbf{u}$$
$$= H(\operatorname{grad}\varphi\,,\,\mathbf{u})\,dP + \operatorname{sen}\varphi\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,dP + (1-\cos\varphi)\,\mathbf{u}\wedge\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,dP ,$$

e quindi restano dimostrate le [7], [9]. Per le altre si opera come per le corrispondenti con λ funzione di t.

Dim. [11]. — Dalla [9] si ha

$$K\mu\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{sen}\varphi\,.\,K\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,\mathbf{u} - (1-\cos\varphi)\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,(\mathbf{u}\wedge\mathbf{u}) ;$$

ma $\mathbf{u}\wedge\mathbf{u} = 0$, e, per essere $\mathbf{u}^2 = 1$, $K\dfrac{d\mathbf{u}}{dP}\,\mathbf{u} = 0$, e quindi la [10] è dimostrata.

Dim. [12]. — Se $\mathbf{a}$ è vettore costante, si ha

$$d(\lambda\mathbf{a}) = d\lambda\,.\,\mathbf{a} = (\mu\,dP)\wedge\lambda\mathbf{a} = -(\lambda\mathbf{a})\wedge\mu\,dP ,$$

e quindi

$$(a) \qquad \frac{d(\lambda\mathbf{a})}{dP} = -(\lambda\mathbf{a})\wedge\mu ;$$

operando con 2V, si ha

$$2V\frac{d(\lambda\mathbf{a})}{dP} = -(C\mu)\,\lambda\mathbf{a} \quad , \quad \operatorname{rot}(\lambda\mathbf{a}) = -(C\mu)\,\lambda\mathbf{a}$$
$$(\operatorname{Rot}\lambda)\,\mathbf{a} = -(C\mu)\,\lambda\mathbf{a}$$

che, per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$, dimostra la [12].

Dim. [13]. — La (*a*) vale cambiando λ in $K\lambda$ e μ in μ_1; quindi, ricordando che

$$\operatorname{grad}\lambda \times \mathbf{a} = I_1 \frac{d(K\lambda\mathbf{a})}{dP},$$

si ha

$$\operatorname{grad}\lambda \times \mathbf{a} = I_1 \{-(K\lambda\mathbf{a})\wedge\mu_1\} = 2(K\lambda\mathbf{a}) \times V\mu_1 = (2\lambda V\mu_1) \times \mathbf{a}$$

che, per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$, dimostra la [13].

Dim. [14]. — Dalla (*a*) si ha

$$\frac{d(\lambda\mathbf{a})}{dP}\mathbf{x} = -(\lambda\mathbf{a})\wedge\mu\mathbf{x} \quad , \quad \left(\frac{d\lambda}{dP}\mathbf{x}\right)\mathbf{a} = (\mu\mathbf{x})\wedge\lambda\mathbf{a}$$

che dimostra le [14]. Operando in queste con K, si ottengono le [14′].

Dim. [15]. — Si ha

$$d(\lambda\mathbf{x}) = d\lambda\,.\,\mathbf{x} + \lambda\,d\mathbf{x} = (\mu\,dP)\wedge\lambda\mathbf{x} + \lambda\,d\mathbf{x}$$

$$= \lambda\frac{d\mathbf{x}}{dP}dP - (\lambda\mathbf{x})\wedge\mu\,dP \ (^1).$$

OSSERVAZIONI.

a) Gli *anti-rotor* (cfr. mia Memoria, loc. cit., pag. 15) sono legati ai Rotor dalla relazione

$$\text{a Rotor}(\varphi\,,\,\mathbf{u}) = -\,\text{Rotor}(\pi + \varphi\,,\,\mathbf{u}),$$

e quindi le loro derivate ecc. si ottengono dalle formule precedenti.

b) Le *similitudini vettoriali* (A. V. G., vol. I, pag. 40) sono tutte della forma $x\lambda$, ove x è *numero reale* e λ è isomeria vettoriale (cioè Rotor o a-Rotor). Le derivate ecc. di queste si calcolano ancora con le formule precedenti.

(1) Si ha $(\lambda\mathbf{x})\wedge\mu = (\lambda\mathbf{x})\wedge(\lambda\,.\,K\lambda\,.\,\mu) = R\lambda\{\mathbf{x}\wedge(K\lambda\,.\,\mu)\} = -\lambda(\mathbf{x}\wedge\mu_1)$, e quindi la [15] può assumere la forma

$$\frac{d(\lambda\mathbf{x})}{dP} = \lambda\left(\frac{d\mathbf{x}}{dP} + \mathbf{x}\wedge\mu_1\right).$$

Per λ funzione di P variabile in una superficie si confronti M. Bottasso, loc. cit., e si noti che si ha anche

$$d\lambda = H(\mathbf{N}\,,\,\nu\,dP) - H(K\nu\,.\,\lambda\,dP\,,\,\lambda\mathbf{N}) \quad \text{con} \quad \nu = \sigma_0\lambda - \lambda\sigma\,.$$

Dello stesso autore si consulti pure *Sull'operatore binario* S *di M. Pieri* (Rendiconti R. Accad. Lincei, vol. XXIII, ser. 5ª, 1° sem., pp. 659-665, an. 1914) per ottenere in altro modo la [15].

c) Tra le similitudini vettoriali, $x\lambda$, sono da considerarsi quelle che dànno luogo alle *rappresentazioni conformi*, cioè le $x\lambda$ per le quali

$$x\lambda = \frac{d\mathrm{X}}{d\mathrm{P}} . \tag{1}$$

Esamino la questione, senza risolverla, supposto che λ sia un Rotor.

Affinchè la (1) sia soddisfatta è necessario e sufficiente (A. V. G., vol. I, pag. 118) che

$$\mathrm{Rot}(\mathrm{K}x\lambda) = 0 ,$$

cioè che (cfr. la [12])

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{Rot}(x \,.\, \mathrm{K}\lambda) &= x\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\lambda + \mathrm{grad}\,x \wedge \mathrm{K}\lambda \\ &= -x(\mathrm{C}\mu_1)\,\mathrm{K}\lambda + \mathrm{grad}\,x \wedge \mathrm{K}\lambda , \end{aligned}$$

da cui si ha

$$\mathrm{C}\mu_1 = (\mathrm{grad}\log x)\wedge$$
$$\mu_1 = \mathrm{C}^{-1}\{(\mathrm{grad}\log x)\wedge\} = -(\mathrm{grad}\log x)\wedge .$$

Ne segue che le $x\lambda$ per le rappresentazioni conformi *dirette* sono della forma

$$h e^{-m_1}\lambda ,$$

ove h è numero reale costante, m_1 è numero reale funzione di P, e λ è un Rotor tale che $\mu_1 = (\mathrm{grad}\, m_1)\wedge$.

Matematica. — *Sur les ondes liquides.* Nota di J. Hadamard, presentata dal Socio S. Pincherle.

J'ai, dans un précédent travail (1), montré que l'équation des petits mouvements de la surface libre d'un liquide (équation qui définit l'altitude z de la surface au dessus de la position d'équilibre, en fonction des coordonnées horizontales x, y) n'était pas une équation aux dérivées partielles, mais un équation *intégro-différentielle*. Cette équation peut s'écrire

$$\frac{4\pi}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint \frac{z'}{r}\,dx'\,dy' + \iint z'\,\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial z\,\partial z'}\,dx'\,dy' , \tag{1}$$

en désignant par (x', y', z') un second point quelconque P de la surface libre;

par r la distance des ces deux points;

par r_1 la distance d'un de ces points à l'image de l'autre prise relativement au plan $z = 0$;

(1) Comptes Rendus de l'Ac. des sc. de Paris, du 21 mars 1910. Voir Bouligand, Bull. de la Soc. math. de France, 1912. Les mêmes principes sont au fond employés dans les travaux antérieurs de Poincaré et de M. Volterra sur cette question.

par

$$G = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + H(x, y, z; x', y', z') \tag{2}$$

la fonction de Green du problème mixte consistant à déterminer une fonction harmonique au moyen de seu valeurs sur la surface libre et de celles de sa dérivée normale le long de la paroi mouillée.

Or, d'autre part, lorsque la profondeur h est uniforme et très petite, Lagrange a donné, pour le même problème, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = gh\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right). \tag{3}$$

Ce résultat est obtenu par une étude directe du mouvement dans tout l'intérieur du fluide. Mais, de plus, le fait que la profondeur est très petite est utilisé, tant par Lagrange que depuis lui (voir, en particulier, la *Théorie des marées* de Poincaré), à l'aide d'une méthode classique en pareille circonstance, mais qui soulève néammoins de graves objections, puis qu'elle conduit à developper les inconnues suivant les puissances de la profondeur et à négliger tous les termes d'ordre supérieur, bien que l'ordre de grandeur des coëfficients de ces termes soit totalement inconnu. En fait, comme on le sait déjà et comme nous allons le retrouver, le résultat lui-même n'a lieu que conditionnellement.

Je me propose d'établir ce résultat en partant de l'équation (1).

Supposons le fluide indéfini dans le sens horizontal.

Il n'ya aucune difficulté à former pour le volume d'un tal fluide, c'est à dire pour le domaine limité par deux plans horizontaux parallèles, la fonction de Green G. Il suffit d'appliquer la méthode des images. On est ainsi conduit à introduire la quantité

$$\Gamma = \frac{1}{r} - \frac{2}{\sqrt{r^2 + 4h^2}} + \cdots + 2\frac{(-1)^n}{\sqrt{r^2 + 4n^2h^2}} \cdots, \tag{4}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{r^2 + 4n^2h^2}};$$

moyennant laquelle, (1) s'écrit aisément

$$2\pi \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \iint \Gamma(x, y, x', y')\, \Delta z'\, dx'\, dy'. \tag{1^{bis}}$$

Toute la question revient à connaître l'ordre de grandeur de cette quantité Γ, ordre de grandeur masqué dans l'expression (4) par la destruction mutuelle des termes.

Le moyen d'arriver à ce résultat nous cest fourni par le calcul des résidus (voir l'ouvrage consacré à ce sujet par M. Lindelöf, dans la collection

de M. Borel; Paris, Gauthier-Villars). La somme (4) peut être remplacée par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(u)\,du\,.\,\frac{\pi}{\sin \pi u}\quad,\quad f(u)=\frac{1}{\sqrt{r^2+4u^2h^2}}$$

prise suivant un contour entourant tout l'axe réel.

Des transformations simples nous donnent ainsi

$$\Gamma = 2\int_{\frac{r}{2h}}^{\infty}\,.\,\frac{dv}{\sqrt{4v^2h^2-r^2}\,\mathrm{S}(\pi v)}\,, \tag{5}$$

S désignant un sinus hyperbolique.

Ceci fait, aucune difficulté ne subsiste plus. En raison de la présence du facteur sinus hyperbolique au dénominateur, la partie d'integrale dans laquelle r est du même ordre de grandeur que h, subsiste seule. Sidonc h est petit, on peut identifier $\Delta z'$ avec Δz *pourvu que les variations de* Δz *ne soient pas très rapides*, et on tombe bien sur (3).

On voit que, dans cette manière d'opérer, l'hypothèse de la petitesse de h n'est introduite qu'en dernière analyse, la calcul fournissant tout d'abord des formules rigouruses quel-que-soit h; et que, de plus, nous pouvons mettre en évidence avec précision et simplicité les conditions de légitimité de l'équations de Lagrange, laquelle, dans certains cas, est, en fait, mise en défaut.

L'application de (2^{bis}) [avec la valeur (5) de Γ] au cas de h fini fournit également les résultats connus pour ce dernier cas, spécialement en ce qui regarde les ondes rectilignes. Il suffit de supposer z indépendant de y. Si, de plus, on admet une propagation de vitesse constante V, de sorte que $z = fx - \mathrm{V}t)$, on trouve une équation intégrale de la forme

$$\mathrm{V}^2 f''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f''(\xi)\log\left|\mathrm{T}\left(\frac{(x-\xi)}{2}\right)\right| d\xi\,, \tag{6}$$

où T désigne une tangente hyperbolique.

Cette dernière équation appartient à la même catégorie générale qu'une de celles qui ont été précédemment considérées par M. Picard: elle est, en effet, de la forme

$$\lambda\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,\mathrm{K}(|x-\xi|)\,d\xi \tag{7}$$

avec $\mathrm{K}(u) = \log \mathrm{T}(u)$.

Dans le cas de $\mathrm{K}(u) = e^{-mu}$, M. Picard a montré que l'équation (7) admet des solutions non nulles pour une infinité *continue* de valeurs de λ (contrairement aux résultats classiques de Fredholm).

La remarque ainsi obtenue *s'étend à toutes les équations du type* (7) (pourru que la fonction K ait une décroissance convenable à l'infini).

Soit, en effet, s un nombre réel quelconque; l'équation (7) admet la solution $\varphi(x) = \begin{cases} \cos sx \\ \sin sx \end{cases}$, pourra que l'on ait

$$\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos s\xi \, \mathrm{K}(|\xi|)\, d\xi = 2 \int_{0}^{\infty} \cos s\xi \, \mathrm{K}(\xi)\, d\xi \; ;$$

ce qui, en faisant varier s, fournit bien une infinité continue de valeurs de λ.

Ce sont ces solutions qui, pour l'équation (6), fournissent les ondes classiques des bassins à profondeur constante.

Par contre, rien ne dit que cette equation n'admet pas d'autres solutions, où la fonction φ ne soit pas trigonométrique, et qui donnent, par conséquent, des ondes progressives de forme différente, analogues à l'onde solitaire. C'est ce qui arriverait pour l'équation de M. Picard, dont la solution fournie par son auteur est exponentielle et non trigonométrique.

Je terminerai en ajoutant, sans entrer dans le détail:

1°) que si le liquide n'était pas indéfini dans le sens horizontal, il foudrait partir de la fonction de Green relative à un liquide de hauteur ph (p étant un entier assez grand pour que cet hauteur soit finie) et opérer sur elle comme nous l'avons fait sur $\frac{1}{r}$ pour obtenir Γ;

2°) que si la profondeur n'était pas constante, il faudrait appliquer les formules de variation que j'ai établies autrefois (voir mes *Leçons sur le calcul des variations*) relativement aux fonctions de Green.

Astronomia. — *Osservazioni di comete fatte negli anni 1914 e 1915 all'equatoriale Dembowski di 187 m.m. del r. Osservatorio astronomico di Padova.* Nota di B. Viaro, presentata dal Socio E. Millosevich.

Le presenti osservazioni sono state fatte in continuazione di altre già pubblicate nelle « Astronomische Nachrichten », nn. 4726, 4793, 4817.

Esse riguardano le comete:

1914 *b* (Zlatinsky)
1913 *f* (Delavan)
1915 *a* (Mellish)

nell'ordine dei quadri che seguono:

Data	T. m. Padova	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Cfr.	α app.	log. p. Δ	δ app.	log. p. Δ	Red. ad 1 pp	*

Cometa 1914 *b* (Zlatinsky)

1914																
		h	m	s	m	s	′	″		h	m	s		°	′	″	s	″	
Maggio	20	10	46	0	— 1	12.75	— 4	53.1	12 · 6	4	40	47.03	9.533	+ 48	8	4.1	0.02	+ 11.1	1
»	21	9	36	22	— 0	13.98	— 6	45.5	10 · 8	5	14	0.29	9.696	+ 46	15	58.4	0.832	+ 0.13 + 11.5	2
»	23	9	42	36	— 0	11.92	— 3	48.6	14 · 12	5	59	53.79	9.701	+ 42	13	21.0	0.809	+ 0.44 + 11.5	3
»	23	10	24	35	+ 0	26.02	— 7	57.0	6 · 6	6	0	31.73	9.652	+ 42	39	15.6	0.850	+ 0.44 + 11.5	3
»	23	10	24	35	— 1	9.22	— 1	27.8	6 · 6	6	0	31.71	9.651	+ 42	39	16.8	0.851	+ 0.44 + 11.5	4

Scoperta da Zlatinsky a Mitau (Russia) il 15 maggio 1914; passò al perielio ai primi di maggio.

Maggio 20. Fu vista come una macchia nebulosa di forma circolare con condensazione centrale abbastanza luminosa, e fu stimata di splendore pari a quello di una stella di 6ª grandezza.

Cometa 1913 *f* (Delavan)

1914																
Settembre	8	7	31	33	+ 0	53.72	+ 1	14.5	18 · 12	9	8	28.52	9.580	+ 19	49	56.1	0.893	+ 2.25 — 7.8	5
Ottobre	12	6	21	52		2 39.10	+	38.7	20 · 8	13	7	0.55	9.709	+ 37	24	0.6	0.744	+ 1.35 14.5	6
»	14	6	20	50	— 0	34.17		9 19.0	20 · 10	13	17	34.03	9.702	+ 35	54	14.6	0.746	+ 1.35 — 14.6	7
»	27	6	14	19	— 4	24.64	+ 10	15.7	20 12	14	14	5.36	9.659	+ 25	53	36.8	0.767	+ 1.36 — 14.5	8

Scoperta da Delavan a La Plata il 17 dicembre 1913; passò al perielio nell'ottobre 1914.

Settembre 8. Si vide come nebulosità rotonda, ampia circa 5′, a contorno sfumato, con bel nucleo lucente un po' eccentrico. — Ottobre 12. Apparve formata da un nucleo splendentissimo circondato da viva nebulosità che prolungavasi in più rami per circa 1° verso il nord lungo il cerchio di declinazione; in questa sera l'astro fu visibile, con la sua coda, anche ad occhio nudo, come una stella di 2ª in 3ª grandezza.

Cometa 1915 *a* (Mellish)

Data	T. m. Padova	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Cfr.	α app.	log. p. Δ	δ app.	log. p. δ	Red. ad l. app.	*
1915	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		s ″	
Aprile 5	15 30 29	+ 0 32.20	+ 13 12.8	20 · 12	18 10 41.14	9.268 *n*	− 2 21 15.5	0.810	+ 1.70 14.5	9
» 5	15 30 29	+ 0 20.98	+ 8 4.4	20 · 12	18 10 41.21	9.268 *n*	− 2 21 17.1	0.810	+ 1.70 14.5	10
» 14	16 7 27	− 2 26.56	+ 2 55.7	18 · 10	18 22 11.31	8.915 *n*	− 1 27 27.7	0.825	+ 1.92 − 12.7	11
» 15	16 8 46	1 8.87	− 13 50.0	18 · 10	18 23 29.06	8.877 *n*	− 1 41 13.4	0.827	+ 1.95 12.7	11
» 25	14 16 11	− 2 4.13	+ 3 53.8	18 · 12	18 36 51.61	9.346 *n*	− 8 17 52.3	0.840	+ 2.23 9.9	12
» 30	14 59 29	− 0 19.60	− 11 44.1	20 · 12	18 41 15.56	9.119 *n*	− 10 52 13.5	0.858	+ 2.38 8.4	13
Maggio 2	15 10 22	0 39.26	0 19.7	20 · 12	18 47 24.75	9.019 *n*	− 12 5 51.1	0.865	+ 2.45 7.6	14
» 2	15 37 10	0 30.71	6 36.6	18 · 8	18 47 26.75	8.748 *n*	− 12 6 38.1	0.867	+ 2.45 − 7.6	15
Ottobre 16	13 32 38	+ 0 33.02	+ 1 56.2	18 · 10	5 53 8.36	9.442 *n*	− 14 8 41.8	0.856	+ 3.35 + 18.9	16
» 17	15 13 17	− 0 10.71	+ 6 32.5	18 · 8	5 51 9.81	8.672 *n*	− 13 52 53.4	0.875	+ 3.39 + 18.9	17
Novembre 11	10 12 10	+ 0 51.78	− 0 25.5	18 · 8	4 55 29.56	9.455 *n*	− 6 24 12.3	0.825	+ 4.41 + 18.2	18
» 11	10 12 10	− 0 37.50	+ 1 6.1	18 · 8	4 55 29.58	9.155 *n*	− 6 24 14.1	0.825	+ 4.40 + 18.1	19
» 16	12 14 49	+ 0 30.41	+ 2 35.4	18 · 6	4 43 1.01	8.936 *n*	− 4 34 50.1	0.825	+ 4.56 + 18.2	20
» 28	9 31 44	0 58.12	− 6 15.2	18 · 8	4 15 35.05	9.366 *n*	− 0 13 33.8	0.796	+ 4.84 + 18.5	21
» 28	9 31 44	− 1 35.93	+ 3 57.9	18 · 8	4 15 35.19	9.366 *n*	− 0 13 31.0	0.796	+ 4.84 + 18.4	22

Scoperta da J. E. Mellish a Cottage Grove (Wisconsin) nella prima decade del febbraio 1915 (ved. Bulletin, n. 573, dell'Harvard College Observatory); passò al perielio verso la metà del luglio 1915.

Luoghi medii delle stelle di confronto.

*	α	δ	Autorità
		1914.0	
1	4 51 59.80	+48 12 46.4	Bo 3986
2	5 14 14.14	+46 52 32.4	Kü 2306
3	6 0 5.27	+42 47 1.1	Bo 4983
4	6 1 40.49	+42 40 33.1	„ 5005
5	9 7 32.55	+49 48 49.4	½ (Bo 6989 + Cbr M. 3331)
6	13 9 38.30	+37 20 36.4	Lu 5588
7	13 18 6.85	+36 4 48.2	„ 5745
8	14 19 15.64	+25 43 35.6	Cbr E. 6814
		1915.0	
9	18 10 10.24	— 2 37 43.8	Strb 6105
10	18 10 21.53	— 2 32 7.0	„ 6108
11	18 24 35.98	— 4 30 10.7	„ 6181
12	18 38 53.51	— 8 21 36 2	Fond.le 5 H. *Scuti* B. J., n. 702
13	18 44 32.78	—10 40 21.0	Cbr M. 6458
14	18 48 1.56	— 12 5 23.8	„ 6489
15	18 47 55.01	—11 59 54.2	BD —12°5195 Cerch. merid. Pad.
16	5 52 31.99	— 14 10 56.9	Fond.le η *Leoporis* B. J., n. 226
17	5 51 17.13	— 13 59 44.8	½ (AGWash 1825 + Cbr M. 1673)
18	4 54 33.37	— 6 24 5.0	Ott 1289
19	4 56 2.68	— 6 25 38.3	„ 1298
20	4 42 26.04	— 4 37 43.7	Strb 1269
21	4 16 28.33	— 0 7 37.1	Abb.dia oss. 5 Ep. 1909.4
22	4 17 6.28	— 0 17 47.3	„ „ 5 „ 1909.0 m. pr.

* 14 — Fu erroneamente identificata in Cbr M. per la BD —12° 5195 $9^m.0$. La sua posizione per il 1855.0 è: $18^h44^m40^s.3$ — 12°9′.4. Essendo di $9^m.3$, può venire inserita nella BD con la indicazione 5195^a.

* 15 — L'epoca della posizione ottenuta al Cerchio meridiano di Padova è 1915.6; e tale posizione risulta da due osservazioni in AR e tre in Decl. È essa la stella identica con la BD —12°5195: difatti, dalle coordinate sopra riportate risulta, per il 1855.0:

$18^h44^m33^s.9$ — 12°3′.9,

mentre dalla BD si ha: 18 44 35 .2 —12 4 .0.

* 22 — Fu utilizzato il moto proprio di C_{i_1} 479: $\mu_\alpha = -0^s.0025$ $\mu_\delta = 0''.133$.

Chimica. — *Nuovi composti complessi del vanadio trivalente* (1). Nota di G. A. Barbieri, presentata dal Socio G. Ciamician.

Le ricerche di R. F. Weinland (2) e di A. Werner (3) sugli acetati basici di cromo e di ferro hanno fatto conoscere numerosi composti complessi a catione polinucleato, che corrispondono alle formule generali

$$\left[\begin{matrix}(CH_3COO)_6\\ Cr_3(OH)_2\end{matrix}\right]X \qquad \left[\begin{matrix}(CH_3COO)_6\\ Fe_3(OH)_2\end{matrix}\right]X,$$

dove X può significare Cl, Br, J, NO_3, $^1/_2SO_4$, $^1/_2S_2O_6$, $AuCl_4$ ecc.

Inoltre sono stati descritti formiati e propionati (4) di cromo, formiati benzoati (5) e salicilati (6) di ferro, del tutto analoghi, per la loro costituzione, agli acetati basici.

Non è ancora noto se altri elementi possano, come il cromo e il ferro, dare origine a cationi complessi con acidi organici.

Il vanadio — che, nella forma VX_3, si avvicina molto al cromo e al ferro, tanto nei composti complessi con gli acidi fluoridrico, ossalico, cianidrico, solfocianico, nei quali composti il vanadio fa parte dell'anione, quanto nei composti di vanadiurea (7), nei quali fa parte del catione — mi parve l'elemento che con maggiore probabilità avrebbe potuto dare composti complessi a catione polinucleato analoghi a quelli ricordati sopra.

Per verificare tale previsione, ho intrapreso lo studio dei formiati, acetati, benzoati e salicilati del vanadio trivalente.

Intorno a questi composti non si trova, nella letteratura, nessuna notizia.

Riferisco nella presente Nota i risultati delle ricerche sui formiati.

Per azione del formiato di bario sul solfato del vanadio trivalente, ho ottenuto una sostanza verde cristallizzata in aghi. Essa contiene vanadio e acido formico, e, dal suo potere riducente, si calcola che il vanadio vi si trova tutto nella forma VX_3.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale dell'Università di Ferrara.

(2) Berichte, 41_{2236} (1908), 42_{2997} (1909), 43_{2144} (1910); Z. anorg. Ch., 66_{157} (1910), $67_{167-250}$ (1910).

(3) Berichte, 41_{2447} (1908).

(4) R. F. Weinland e K. Hoehn. Z. anorg. Ch., 69_{158} (1911).

(5) R. F. Weinland e A. Herz, Berichte, 45_{2662} (1912).

(6) R. F. Weinland e A. Herz, Liebig. Ann., 400_{219} (1913).

(7) G. A. Barbieri, Rendiconti Accad. Lincei, XXIV, 1_{435} (1915).

Il rapporto atomico $\frac{V}{C}$, determinato su varî prodotti, preparati in condizioni diverse, risulta costantemente uguale a $\frac{1}{2,4}$. Non si tratta dunque di un sale neutro, ma bensì di un sale basico, il quale però differisce dai comuni sali basici, anzitutto perchè è cristallino, poi perchè è solubile in alcool metilico, e infine perchè lo si può ottenere, senza che varii la sua composizione, anche da soluzioni fortemente acide per acido formico. Per queste singolarità il formiato basico di vanadio rassomiglia al formiato basico di cromo, ed è naturale di pensare che, come quest'ultimo, sia di natura complessa.

Nel formiato basico di cromo, il rapporto $\frac{Cr}{C}$ è $= \frac{1}{2,33}$, ossia a $\frac{3}{7}$, mentre, come si è detto, nel formiato basico di vanadio $\frac{V}{C} = \frac{1}{2,4} = \frac{5}{12}$.

La formula minima del formiato di cromo è

$$Cr_3(HCOO)_7(OH)_2 \cdot 5H_2O,$$

mentre quella del formato di vanadio è

$$V_5(HCOO)_{12}(OH)_3 \cdot 6H_2O.$$

Nel formiato di cromo A. Werner ha dimostrato che uno solo dei sette radicali formici è sostituibile con NO_3, Cl, Br ecc., e quindi giace nella sfera esterna del composto, che, secondo Werner, ha la formula

$$\left[Cr_3^{(OH)_2}_{(HCOO)_6} \right] HCOO \cdot 5H_2O.$$

Quale costituzione è da attribuire al formiato basico di vanadio?

Purtroppo il formiato di vanadio, quando venga trattato con acidi energici, si trasforma tosto negli aquosali del vanadio trivalente; e non sono quindi possibili, con questo composto, le reazioni di sostituzione e di doppio scambio, che permetterebbero di determinare quale complesso sia in esso contenuto. Qualche indizio sulla sua costituzione si può dedurre soltanto per analogia con un formiato ferrico basico, preparato da R. F. Weinland [1], in cui il rapporto $\frac{Fe}{C}$ è $= \frac{1}{2,4}$ e la cui formula minima è

$$Fe_5(HCOO)_{12}(OH)_3 \cdot 7H_2O$$

[1] Berichte 46_{3150} (1913).

che, soltanto per una molecola di acqua in più, differisce da quella del composto di vanadio.

R. F. Weinland attribuisce al composto ferrico la costituzione espressa dalla formula seguente (che è eguale al doppio della formula minima):

$$\left[Fe_3\begin{matrix}(HCOO)_6\\(OH)_2\end{matrix}\right]_3 Fe(HCOO)_6 \cdot 14H_2O\,,$$

cioè lo considera come un sale risultante dalla combinazione dell'acido ferriformico $H_3Fe(HCOO)_6$ con la base monoacida esaformiato-diol-triferrica

$$\left[Fe_3\begin{matrix}(HCOO)_6\\(OH)_2\end{matrix}\right]OH\,.$$

Se, in base all'analogia di composizione, si ammette che esista tra il formiato di ferro e il formiato di vanadio analogia di costituzione, cioè se si attribuisce al composto di vanadio la formula

(I) $$\left[V_3\begin{matrix}(HCOO)_6\\(OH)_2\end{matrix}\right]_3 V(HCOO)_6 \cdot 12H_2O\,,$$

diventa possibile prevedere l'esistenza di altri composti di vanadio con l'acido formico. Anzitutto devono esistere i sali alcalini dell'acido vanadiformico, come esiste il sale di sodio dell'acido ferriformico $Na_3Fe(HCOO)_3$ descritto da R. F. Weinland.

Ho potuto confermare sperimentalmente questa previsione, preparando il vanadiformiato di sodio

(II) $$Na_3V(HCOO)_6$$

in cristalli azzurri, che hanno molta rassomiglianza coi cristalli verdi del ferriformiato sodico.

È inoltre prevedibile che tra il composto (I) e il composto (II) possano esistere i seguenti composti intermedî:

$$\left[V_3\begin{matrix}(HCOO)_6\\(OH)_2\end{matrix}\right]_2 \begin{matrix}\\Na\end{matrix}\Bigg] V(HCOO)_6 \quad \text{e} \quad \left[V_3\begin{matrix}(HCOO)_6\\(OH)_3\end{matrix}\right] \begin{matrix}\\Na_2\end{matrix}\Bigg] V(HCOO)_6\,.$$

Io ho ottenuto dei prodotti che sono probabilmente miscele di questi due composti. Allo stato di purezza ottenni il composto di ammonio:

$$\left[V_3\begin{matrix}(HCOO)_6\\(OH)_2\end{matrix}\right] \begin{matrix}\\(NH_4)_2\end{matrix}\Bigg] V(HCOO)_6\,.$$

Sali misti di questo tipo sono naturalmente prevedibili anche per il ferro. Weinland non li ha ottenuti; ma effettivamente esistono, e verranno da me descritti in un'altra Nota.

Dalle soluzioni dell'idrato ferrico nell'acido formico concentrato, E. Belloni (1) ha ottenuto il formiato $Fe_3(HCOO)_7(OH)_2 . 4H_2O$ e, per analogia col formiato cromico, studiato da Werner, ha ad esso attribuito la costituzione espressa dalla formula

$$\left[Fe_3^{(OH)_2}{}^{(HCOO)_6} \right] HCOO . 4H_2O .$$

Io ho tentato ripetutamente di preparare il composto corrispondente di vanadio, ma sempre con risultato negativo; ed ho sempre ottenuto prodotti col rapporto $\frac{V}{C}$ uguale a $\frac{1}{2.4}$ e non a $\frac{1}{2,33}$.

Ciò mi ha indotto a ripetere la preparazione del composto di Belloni. Dalle soluzioni di idrato ferrico nell'acido formico io ho ottenuto composti nei quali il rapporto $\frac{Fe}{C}$ è molto più vicino a $\frac{1}{2,4}$ che non a $\frac{1}{2,33}$; e i miei risultati analitici concordano meglio con la formula

$$Fe_5(HCOO)_{12}(OH)_3 . 14H_2O$$

che non con la formula

$$Fe_3(HCOO)_7(OH)_2 . 4H_2O .$$

Siccome poi le percentuali calcolate in base a queste due formule non differiscono molto fra loro, io ritengo probabile che il composto di Belloni sia identico al composto di Weinland.

Dai composti di vanadio (I) e (II), per azione dell'acqua, specie a caldo, si forma una polvere biancastra microcristallina, insolubile in acqua e in alcool. Essa contiene vanadio trivalente ed acido formico. Il rapporto atomico $\frac{V}{C}$ venne trovato uguale a $\frac{1}{2}$. I risultati analitici conducono alla formula

$$[V(HCOO)_2OH]_3 . 2H_2O .$$

È probabile che l'acqua agisca eliminando un radicale formico dal catione complesso a sei radicali formici, e che il composto insolubile sia il formiato di una pentaformiato trivanadibase

$$\left[V_3^{(OH_3)}{}^{(HCOO)_5} \right] HCOO . 2H_2O .$$

(1) Archiv. Pharm., 247_{128} (1909).

Un fenomeno analogo è stato osservato da Weinland e Buttner (1) con l'acetato basico di cromo. Per azione dell'acqua il catione $\left[Cr_3 \begin{matrix} (CH_3COO)_6 \\ (OH)_2 \end{matrix} \right]$ si trasforma nel catione $\left[Cr_3 \begin{matrix} (CH_3COO)_5 \\ (OH)_3 \end{matrix} \right]$.

Parte sperimentale.

Formiato di vanadio (*grigio-verde*)

$$V_5(HCOO)_{12}(OH)_3 . 6H_2O$$

ovvero $\left[V_3 \begin{matrix} (HCOO)_2 \\ (OH)_2 \end{matrix} \right]_3 V(HCOO)_6 . 12H_2O$.

Una soluzione di $V_2^{III}(SO_4)_3$, preparata riducendo per via elettrolitica una soluzione di solfato di vanadile, venne addizionata con formiato di bario, nella quantità calcolata per precipitare tutto l'acido solforico libero e combinato. Il liquido verde, filtrato, venne concentrato a bagno-maria: per raffreddamento diede un abbondante deposito di cristalli aghiformi, di color grigio-verde, che vennero spremuti alla pompa, lavati con alcool etilico, e seccati fra carta da filtro.

I prodotti ottenuti da preparazioni diverse diedero, all'analisi, risultati concordanti.

gr. 0,3832 di sostanza diedero, dopo calcinazione, gr. 0,1828 di V_2O_5,
» 0,4478 » » gr. 0,2138 di V_2O_5,
» 0,5002 » » » 0,2378 di V_2O_5.
» 0,2492 » » » 0,1372 di CO_2 e gr. 0,0670 di H_2O,
» 0,2744 » » » 0,1520 di CO_2 e gr. 0,0832 di H_2O,
» 0,2531 di sostanza, sciolti in acido solforico diluito, consumarono cc. 26,3 di una soluzione circa $\frac{n}{10}$ di permanganato di potassio (titolo 0,796 di ossigeno per litro).

	Trovato	Calcolato per $V_5(HCOO)_{12}(OH)_3 . 6H_2O$
V	26,68-26.70-26,59	26,8
C	15,02-15,11	15,1
H	3.00- 2,71	2.85
O (consumato)	8,26	8,39

Il formiato di vanadio è solubile in acqua, e anche in alcool metilico, dal

(1) R. F. Weinland E. Buttner, Z. anorg. Ch. 75_{136} (1912).

quale può venir cristallizzato. Nelle soluzioni acquose, specie a caldo, si decompone liberando acido formico e depositando una polvere biancastra, che è un formiato basico, in cui il rapporto atomico $\frac{V}{C}$ è uguale a $\frac{1}{2}$.

In presenza di molto acido formico, il formiato vanadico non subisce tale idrolisi, e può venir cristallizzato anche dalle soluzioni acquose. Esso presenta tutte le reazioni dei composti del vanadio trivalente.

Vanadi-formiato di sodio

$Na_3[V(HCOO)_6]$.

Questo composto può venir preparato dal composto precedente, sciogliendolo a caldo in una soluzione quasi satura di formiato sodico, o anche da una soluzione concentrata di $V_2(SO_4)_3$ per aggiunta di formiato sodico in eccesso. Con quest'ultimo metodo lo si ha impuro per solfato sodico, ed è bene ricristallizzarlo da soluzioni concentrate di formiato sodico.

Il vanadi-formiato si separa lentamente dalle sue soluzioni sotto forma di squamette azzurre trasparenti. Esse vengono separate alla pompa, e lavate con alcool metilico.

Il prodotto, che venne sottoposto ad analisi, era stato seccato nel vuoto su anidride fosforica.

gr. 0,4100 di sostanza, previa calcinazione, dissoluzione del residuo in acido solforico, e riduzione dell'anidride vanadica a solfato di vanadile, consumarono cc. 22,4 di soluzione circa $\frac{n}{10}$ di permanganato (0,796 di ossigeno per litro);

gr. 0,2596 di sostanza, bruciati in presenza di bicromato, diedero gr. 0,1764 di CO_2 e gr. 0,0394 di H_2O;

gr. 0,4536 di sostanza, dopo eliminazione del vanadio con carbonato di bario, e poi del bario con acido solforico, diedero gr. 0,2559 di Na_2SO_4;

gr. 0,5960 di sostanza, sciolta in acido solforico diluito, consumarono cc. 29,6 della soluzione $\frac{n}{10}$ di permanganato.

	Trovato	Calcolato per $Na_3V(HCOO)_6$
V	12,92	13,08
C	18,53	18,46
H	1,70	1,55
Na	18,25 (1)	17,69
O (consumato)	3,90	4,10

(1) Il prodotto, preparato in presenza di un grande eccesso di formiato sodico, contiene evidentemente traccie di questo sale.

Il vanadiformiato di sodio è solubilissimo in acqua; e le sue soluzioni sono verdi, mentre nelle soluzioni concentrate di un formiato alcalino si scioglie con colorazione azzurra.

Dalle soluzioni verdi cristallizzano, in aghi verdi, sostanze che contengono vanadio, acido formico e sodio, ma non in rapporti stechiometrici. Si tratta di miscele, probabilmente dei due composti

$$\left(\left[V_3^{(HCOO)_6}_{(OH_2)}\right]_{Na_2}\right)V(HCOO)_6 \quad \text{e} \quad \left(\left[V_3^{(HCOO)_6}_{(OH_2)}\right]_{Na}^{2}\right)V(HCOO)_6 .$$

Formiato di vanadio e ammonio

$$\left(\left[V^{III}_3{}^{(HCOO)_6}_{(OH)_2}\right]_{(NH_4)_2}\right)V(HCOO)_6 .$$

30 cc. di una soluzione concentrata di $V_2^{III}(SO_4)_3$ (contenente circa 3 gr. di vanadio) vengono addizionati con 10 cc. di acido formico (d. 1,2), poi con ammoniaca fin quasi a neutralizzazione. Si fa bollire per alcuni minuti, poi si lascia raffreddare lentamente. Si separa una bella sostanza grigio-verde, cristallizzata in aghi. A differenza del formiato basico su descritto, al quale rassomiglia, è insolubile nell'alcool metilico e contiene ammoniaca.

gr. 0,8040 di sostanza diedero gr. 0,3574 di V_2O_5;
gr. 0,8846 di sostanza, trattati con soda caustica, neutralizzarono cc. 20,8 di una soluzione $\frac{n}{10}$ di acido solforico;
gr. 0,2656 di sostanza diedero gr. 0,1718 di CO_2 e gr. 0,0705 di H_2O.

	Trovato	Calcolato
V	24,86	24,86
N	3,20	3,42
C	17,64	17,56
H	2,9	2,7

Formiato basico di vanadio (*biancastro*)

$$[V(HCOO)_2OH]_3 . 2H_2O .$$

10 gr. del prodotto precedente vennero sciolti in 100 cc. di acqua e scaldati a bagno-maria: dopo alcun tempo il liquido intorbida, e si deposita una polvere quasi bianca, insolubile in acqua e in alcool metilico. Essa contiene soltanto vanadio trivalente ed acido formico. Nell'acido cloridrico si scioglie a freddo lentamente, con colorazione verde.

Variando le condizioni di preparazione, oppure adoperando, invece del formiato doppio, il formiato basico grigio-verde, si ottengono prodotti che presentano gli stessi caratteri e la stessa composizione.

gr. 0,6826 di sostanza diedero gr. 0,3611 di V_2O_5,
» 0,2560 » » » 0,1324 di CO_2 e gr. 0,0632 di H_2O,
» 0,2856 » » » 0,1480 di CO_2 e gr. 0,4704 di H_2O,
» 0,2250 » sciolti in acido solforico diluito consumarono a freddo cc. 26,1 di soluzione $\frac{n}{10}$ di permanganato.

	Trovato	Calcolato per $[V(HCOO)_2OH]_2 . 2H_2O$
V	29,63	30,00
C	14,11 - 14,13	14,11
H	2,76 - 2,75	2,54
O (consumato)	9,23	9,41

Formiato ferrico basico.

Nella preparazione di questo composto si seguirono le indicazioni del Belloni (1). L'idrato ferrico, preparato di recente e ben lavato, venne sciolto in acido formico al 50 %: si concentrò a bagno-maria, poi si lasciò cristallizzare.

Il prodotto si presenta in cristalli aghiformi colore rosso-rame, che vennero seccati fra carta da filtro.

Le analisi eseguite su prodotti diversi diedero risultati concordanti:

gr. 0,6068 di sostanza diedero gr. 0,2426 di Fe_2O_3,
» 0,5588 » » » 0,2232 » Fe_2O_3,
» 0,3918 » » » 0,1570 » Fe_2O_3,
» 0,5994 » » » 0,2392 » Fe_2O_3,
» 0,2580 » » » 0,1356 » CO_2 e gr. 0,0712 di H_2O,
» 0,2788 » » » 0 1466 » CO_2 e gr. 0,0762 di H_2O.

	Trovato	Calcolato per $Fe_5(HCOO)_{12}(OH)_2 . 14H_2O$	Calcolato per $Fe_3(HCOO)_7(OH)_2 . 4H_2O$
Fe	27,96 - 27,94 28,03 - 27,91	28,02	28,47
C	14,33 - 14,34	14,45	14,27
H	3,08 - 3,05	3,00	2,91

(1) Archiv. pharm. 245_{122} (1909).

Petrografia. — *Osservazioni petrografiche sopra alcuni manufatti litici della Sardegna* (1). Nota I di Rosa Bariola, presentata dal Corrispondente Federico Millosevich.

I manufatti descritti in questa Nota furono, con altri che formeranno argomento di altra Nota, inviati all'Istituto di Mineralogia della R. Università di Pavia dal prof. Antonio Taramelli, sopraintendente agli scavi per la Sardegna, perchè ne venisse fatto lo studio petrografico.

Il prof. Brugnatelli volle affidare a me questo studio: per il che, e per i consigli e gli aiuti prestatimi, gli rendo vivissime grazie. Purtroppo, dovendo il materiale inviato essere il più possibile risparmiato, ed essendo nel maggior numero dei casi troppo scarso dovetti limitare le mie ricerche allo studio microscopico delle sezioni sottili. Mi fu, ad ogni modo, di grande aiuto il confronto, così in massa come nei preparati microscopici, con gli esemplari della ricca collezione petrografica sarda, esistente nel nostro Istituto, raccolta dal compianto dott. Carlo Riva e che servì per i suoi ben noti studî di litologia sarda (2).

Anche limitate allo studio microscopico, queste ricerche non mi sembrarono prive di interesse, poichè, mentre per altre stazioni neolitiche italiane esistono particolareggiate descrizioni petrografiche (3), per le stazioni sarde tale studio si può dire che manchi affatto. Le numerose descrizioni di manufatti litici della Sardegna, pubblicate dal prof. Lovisato (4), sono bensì accompagnate in alcuni casi, da osservazioni microscopiche, ma queste sono troppo incomplete per poter servire alla determinazione petrografica dei manufatti stessi.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Pavia.

(2) Carlo Riva, *Le roccie granitoidi e filoniane della Sardegna*. Atti della R. Accademia delle scienze di Napoli, vol. XII, serie II, a. 1905.

(3) Vedasi per es. G. Piolti, *I manufatti litici del riparo sotto roccia di Voyes (val di Susa)* [Atti della R. Acc. delle scienze di Torino, vol. XXXVI, a. 1901-902, pag. 476]; S. Franchi, *I giacimenti alpini ed appenninici di roccie giadeitiche ed i manufatti di alcune stazioni neolitiche italiane* [Atti del Congresso internazionale di scienze storiche. Roma 1903, vol. V, pag. 357]; E. Artini, *I manufatti litici del Museo Ponti all'isola Virginia (lago di Varese)* [Rend. del R. Istituto lomb. di scienze e lettere, serie II, vol. XLII, 1909, pag. 720].

(4) D. Lovisato, *Una pagina di preistoria sarda*, in Mem. della R. Acc. dei Lincei (scienze fisiche-naturali), serie IV, vol. III, 1886, pag. 30; *Nota* II *ad una pagina di preistoria sarda*, in Rend. R. Acc. dei Lincei, 1887, pag. 88; *Nota* III *ad una pagina di preistoria sarda*, in Rend. R. Acc. dei Lincei, 1888, pag. 420.

Ora a me sembra che un particolareggiato esame microscopico, che riveli con sufficiente esattezza la natura della roccia, le particolarità della sua struttura e della sua composizione mineralogica, sia indispensabile per potere eventualmente determinare il luogo d'origine dei materiali di cui sono costituiti i manufatti, e soprattutto per il confronto con altri di altre località.

Gli oggetti da me studiati sono frammenti di ascie, di teste di mazza, di lisciatoi, di pestelli ecc., e provengono dalle seguenti stazioni: Perdinas, S'Apparassi, Settimo S. Pietro e Sestu, nelle vicinanze di Cagliari (1).

In questa prima Nota esporrò i risultati delle mie ricerche sopra un gruppo di manufatti costituiti da roccie ad orneblenda, di origine evidentemente eruttiva, le quali, quantunque abbiano aspetto macroscopico tra loro alquanto diverso, pur tuttavia, per la composizione mineralogica e per la struttura, sembrano appartenere ad una stessa famiglia e forse allo stesso giacimento, potendo esse rappresentare facies diverse di una stessa massa filoniana.

In alcuni casi queste roccie hanno aspetto distintamente granulare, che ricorda quello delle sieniti e dioriti a grana minuta; più frequentemente, invece, sono assai compatte, di colore grigio o grigio-verdastro più o meno oscuro, con o senza minuti interclusi porfirici. Al microscopico rivelano in generale una struttura che sta tra la granulare-panidiomorfa e la diabasica-intersertale, con tendenza, in alcuni casi, alla porfirica. Il carattere mineralogico comune a tutte è la grande abbondanza degli elementi colorati, rappresentati, in primo luogo, da un'*orneblenda* ordinariamente bruna, talvolta di colore verde olivastro intenso, con forte pleocroismo ($n_g \geqq n_m > n_p$) nei toni bruni e gialli o verdi e gialli, e con $z : n_g$ in media = 15 - 16°. I cristalli in alcuni casi sono tozzi, in altri, sottili e fortemente allungati. Sempre presente è anche un altro *anfibolo* di colore verde-chiaro, con debole pleocroismo, e con $z : n_g$ in media = 18°. Questo *anfibolo* è frequentemente concresciuto con la *orneblenda*, e talvolta sembra costituire il passaggio tra questa ed una *clorite*, la quale è abbondantemente diffusa in tutti gli esemplari, sia intimamente associata ai detti anfiboli, come pure in plaghe isolate. In queste plaghe cloritiche è d'ordinario diffuso l'anfibolo verde-chiaro in sottili prismetti.

I *feldispati* sono quasi sempre in liste generalmente bene delimitate. Sono d'ordinario alteratissimi in muscovite e, talvolta, anche in caolino. Nei campioni con interclusi feldispatici porfirici questi sono meno alterati che non quelli della pasta.

Dove l'alterazione non eccessivamente inoltrata permise di eseguire qualche osservazione intorno alla loro natura, essi si dimostrarono come appartenenti a termini della serie sodico-calcica. Sono specialmente basici gli interclusi, mentre i feldispati della pasta sono, in generale, notevolmente

(1) Ant. Taramelli, *Guida del museo nazionale di Cagliari*, 1915, pp. 4 e 5.

più acidi. Riporterò le poche misure, che poterono essere eseguite, nella breve descrizione, di ogni manufatto, che farò qui seguire.

Il *quarzo* è presente in quasi tutti i campioni; sempre allotriomorfo rispetto agli altri componenti, esso riempie i vani tra i medesimi.

Come elementi accessorii citerò la *apatite*, d'ordinario in sottili e lunghi aghi; qualche raro granulo di *zircone*, la *titanite*, l'*ilmenite* più o meno trasformata in leucoxeno, l'*epidoto* e la *calcite*.

Il peso specifico di queste roccie varia da 2,80 a 2,87 (1).

Per tutti questi caratteri queste roccie presentano spiccatissima somiglianza colle roccie lamprofiriche, che il Riva descrisse come *spessartiti propriamente dette, a struttura granulare panidiomorfa o porfirica* (loc. cit., pag. 59). Di tale somiglianza ho potuto convincermi col confronto diretto cogli esemplari e colle sezioni studiate dal Riva.

A questo tipo petrografico appartengono i seguenti manufatti, dei quali riassumerò qui soltanto quei caratteri petrografici, che sono speciali per ciascuno, bastando per il resto le caratteristiche generali sopraindicate:

1°) Ascia di S'Apparassi. — Roccia a grana media, nella quale già ad occhio nudo si distinguono nettamente gli individui feldispatici dagli elementi colorati. Struttura microscopica nettamente panidiomorfa. I feldispati, benchè fortemente alterati in muscovite, permisero di eseguire le seguenti misure: potere rifrangente superiore a quello del balsamo ($n = 1{,}54$ circa); estinzione massima osservata nella zona normale $= 33°$: sembra quindi trattarsi di un termine *labradoritico*. Frequentemente questi feldispati sono concresciuti al bordo con un altro feldispato non alterato e che, per il potere rifrangente leggermente inferiore a quello del balsamo, dimostra essere assai più acido. Una determinazione esatta non fu possibile. L'*orneblenda* è bruna e generalmente concresciuta coll'anfibolo verde-chiaro.

2°) Testa di mazza di S'Apparassi. — Roccia a struttura granulare assai più minuta della precedente ed assai più ricca in elementi colorati, dal che risulta un colore marcatamente oscuro. Al microscopio presenta una distinta struttura diabasica-intersertale. Gli elementi essenziali sono anche qui, oltre ai feldispati, l'orneblenda bruna concresciuta coll'anfibolo verde-chiaro. Il quarzo è presente in notevole quantità.

Meritano un cenno speciale i feldispati, i quali, essendo poco alterati, permisero di eseguire buone misure. L'estinzione non è mai uniforme, ma graduale, con valori massimi al centro e minimi alla periferia.

I principali valori ottenuti nella zona simmetrica sono:

centro: $+ 29°$; $+ 32°$; $+ 23°$; $+ 32°$
bordo : $- 15°$; $- 12°$; 0; 0

(1) I pesi specifici furono determinati coll'apparecchio di Tralles alla temperatura di circa 18°.

Mentre dunque al centro si giunge fino a miscele labradoritiche, al bordo si scende fino all'*albite*.

In un geminato doppio ottenni i seguenti risultati:

I) centro: + 8°; bordo: — 1°
II) » + 16°; » — 7°

misure che corrispondono ad una andesina per il centro e ad un termine albitico per il bordo. Questi risultati sono confermati anche dal confronto degli indici di rifrazione col balsamo e col quarzo.

Caratteristico per questa roccia è il fatto che il bordo albitico dei feldispati è sempre in accrescimento vermicolato col quarzo, e questi accrescimenti terminano ordinariamente con una plaga quarzosa uniforme.

3°) Ascia di Perdinas. — Roccia analoga alla precedente ma a grana più minuta e più oscura per maggiore abbondanza degli elementi colorati. Notevole è che i feldispati sembrano essere qui più acidi ed appartenere ad un termine *oligoglasico*, come è dimostrato dai confronti col quarzo e dalle estinzioni basse (massimo 5-6°), che poterono osservarsi nei pochi casi dove la profonda alterazione non lo impedì. Mancano i caratteristici accrescimenti col quarzo della roccia precedente.

4°) Ascia di S'Apparassi. — Roccia assai compatta, simile, per struttura e composizione mineralogica alla precedente. I feldispati sono completamente alterati in muscovite e non permisero di eseguire alcuna misura; l'orneblenda ha colore bruno anche qui, ma con tendenza al verde.

5°) Pestello di S'Apparassi. — Roccia perfettamenle identica alla precedente.

6°) Testa di mazza di Sestu. — Roccia di colore grigio-scuro, compattissima. Struttura microscopica e composizione mineralogica in complesso analoghe a quelle delle roccie precedenti; tra i prodotti di alterazione dei feldispati, oltre la muscovite, sembra esservi anche il caolino, come lo dimostra la sua debolissima birifrangenza. In questa roccia si osservano, a differenza che per le precedenti, rari interclusi feldispatici, meno alterati di quelli della pasta. In lamine vicine alla zona simmetrica ho misurato estinzioni che raggiungono 36°. Si tratta quindi di termini molto basici, forse della serie labradorito-bitovonitica.

7°) Ascia di Sestu. — Roccia di aspetto analogo alla precedente. I feldispati sono più alterati, specialmente in caolino, e l'orneblenda, che presenta frequenti passaggi all'anfibolo verde ed alla clorite, non è mai in cristalli allungati come i precedenti, ed ha tinta notevolmente più chiara. Nelle sezioni da me esaminate mancano gl' interclusi feldispatici: di questi però se ne scorge qualcuno esaminando con la lente la roccia.

8°) Ascia di S'Apparassi. — Roccia di colore grigio-verdastro, a grana minutissima. Presenta struttura distintamente porfirica per la presenza

di interclusi feldispatici, con sviluppo isometrico, nella pasta a struttura panidiomorfa.

I feldispati della pasta sono alteratissimi in muscovite; tuttavia le estinzioni costantemente basse (massimo 5°) e gli indici di rifrazione inferiori, benchè di pochissimo, ad ω del quarzo, permettono di riferirli ad un termine oligoclasico. Gli interclusi sono meno alterati, ed in una sezione assai prossima alla zona normale misurai l'estinzione simmetrica = 37°. Trattasi dunque, con ogni probabilità, di un termine basico della labradorite, oppure di una bitownite. I cristalli di anfibolo sono numerosissimi, di colore bruniccio tendente al verde, e di piccole dimensioni. Gli altri elementi non presentano alcuna particolarità degna di speciale menzione.

9°) Pestello di S'Apparassi. — Roccia, sia per i caratteri macroscopici sia per quelli microscopici, perfettamente simile alla precedente; solo, sono più abbondanti gli elementi colorati.

10°) Testa di mazza di Sestu. — Questa roccia ha facies più distintamente porfirica che non le precedenti, ed al microscopio presenta meno evidente la struttura panidiomorfa della pasta. Nessuna utile misura potè essere eseguita per i feldispati. L'orneblenda è bruna.

11°) Lisciatoio di Settimo S. Pietro. — La roccia, che costituisce questo oggetto, si scosta grandemente dal tipo fino ad ora descritto, e, meglio che come una *spessartite*, deve essere considerata come una *porfirite dioritica quarzosa micacea*.

È molto compatta, di colore verdo-grigiastro, e già ad occhio nudo vi si scorgono numerosi piccoli interclusi bianchi e colorati.

Al microscopio la pasta si mostra olocristallina-granulare ad elementi minutissimi. Gli interclusi sono assai alterati; meno di tutti, però, i feldispati. Misure nella zona simmetrica diedero un massimo di estinzione di 35°. Geminati doppii albite-Karlsbad mi diedero i seguenti valori conjugati: + 34° e — 29°, + 3.° e — 25°, che bene si accordano per una *labradorite* prossima ad $Ab_3\ An_4$.

Gli altri interclusi sono alteratissimi, alcuni in carbonati ed epidoto, altri in clorite ed epidoto. I primi, per la figura delle sezioni e per gli avanzi del minerale originario che si osservano, devono attribuirsi ad orneblenda; gli altri a biotite. Tra gli interclusi è pure presente il quarzo in piccola quantità.

La pasta è costituita quasi completamente di quarzo e di un feldispato che non potè esser determinato; subordinatamente prendono parte alla sua costituzione anche gli elementi colorati. Apatite ed ilmenite trasformate in gran parte in leucoxeno, e delle quali però rimangono ancora i caratteristici e ben noti avanzi a tipo scheletrico, sono i principali elementi accessorii.

Dai confronti colle rocce raccolte e studiate dal Riva risulta che i manufatti studiati sono tutti costituiti da rocce esistenti in Sardegna.

Sarebbe però impossibile assegnare alle descritte roccie un particolare giacimento. Le maggiori analogie le osservai con alcuni tipi di Caprera, di Sorgono-Tonnara e di Capo Bellavista. Io credo però che il giacimento d'origine delle nostre roccie debba cercarsi nei monti del Serpeddi e dei Sette Fratelli, prossimi alle stazioni dove i manufatti furono rinvenuti. Purtroppo il Riva non potè estendere le sue ricerche e le sue raccolte anche a queste regioni. Dalla lettura del Lamarmora, del vom Rath e del De Castro [1] si può tuttavia dedurre che roccie analoghe si trovino anche nei sopradetti gruppi di monti.

Chimica fisiologica. — *Sulle azioni enzimatiche del sangue riguardanti il glicosio.* I: *Distruzione e condensazione del glicosio per opera del sangue normale.* Nota del dott. Ugo Lombroso, presentata dal Socio L. Luciani.

Avendo intrapreso una serie di ricerche per indagare il metabolismo del glicosio nell'organismo, ho dovuto soffermarmi ad eseguire alcune ricerche collaterali, per poter meglio interpretare i fenomeni osservati nelle esperienze iniziali.

Di queste ricerche collaterali intendo trattare nella presente Nota; ma però credo opportuno di far breve cenno anzitutto di quei risultati ottenuti nelle primitive indagini, per la cui interpretazione si impose la disposizione sperimentale adottata nelle ricerche che verremo esponendo.

Nelle mie indagini sul metabolismo del glicosio nell'organismo [2] io avevo osservato il comportamento del glicosio quando veniva fatto circolare, sciolto in sangue od in liquido di Tirode, attraverso i principali tessuti del nostro organismo (muscolo, fegato, rene, milza, intestino, pancreas), ed avevo osservato che molto differente era il grado di distruzione del glicosio, a seconda che esso veniva disciolto in sangue od in liquido del Tirode. E, più

[1] Alf. La Marmora, *Voyage en Sardaigne*, 3.me partie (*Description géologique*), vol. 1°, Turin 1857; G. v. Rath, *Due viaggi in Sardegna* (traduz. U. Botti), Cagliari 1887; C. De Castro, *Descrizione geologico-mineraria della zona argentifera del Sarrabus* (Mem. descrittive della carta geologica d'Italia, vol. V, pp. 21-35, Roma 1890).

[2] Non furono ancora pubblicate queste ricerche, perchè incomplete. La disposizione sperimentale in esse adottata e lo scopo a cui tendono corrispondono a quelli delle esperienze già precedentemente pubblicate, riguardanti « Il metabolismo degli aminoacidi nell'organismo ». Rendiconti R. Acc. dei Lincei, vol. XIV, pp. 57, 148, 468, 475, 863, 870, 1166, 1263.

precisamente, il glicosio veniva ad essere distrutto in assai maggiore quantità quando era disciolto in sangue. Questo risultato, che più ampiamente descriverò quando potrò pubblicare nel suo organico sviluppo questa serie di indagini, è degno di essere senz'altro rilevato, perchè nella letteratura che riguarda il consumo del glicosio circolante in organi isolati, e che in modo particolare si svolse adoperando quale reattivo il tessuto muscolare cardiaco, si sostiene precisamente il contrario.

Nelle mie indagini inoltre si dimostrarono grandissime differenze da parte dei varî tessuti nell'attitudine a consumare glicosio; ed anche in riguardo ai tessuti più capaci nel distruggere glicosio, si verificarono differenze notevoli da caso a caso, differenze che sono probabilmente in rapporto con lo stato generale del metabolismo dell'animale esperimentato.

Ma per meglio approfondire il processo mediante il quale il glicosio veniva distrutto in così differente misura dai varî tessuti, e cioè per stabilire se il suo consumo era determinato dalla presenza di un enzima glicolitico nel sangue (più o meno attivo, a seconda dei casi) oppure fosse dovuto ad altre cause intrinseche alla funzione del tessuto stesso, ho creduto necessario di istituire una serie complementare di ricerche su questo speciale quesito. Vale a dire ho esaminato come si comporta l'enzima glicolitico del sangue già circolato nel tessuto, in confronto a quello dello stesso sangue non circolato.

Il sangue, come già le classiche esperienze di C. Bernard hanno da molti anni dimostrato, possiede in sè l'attitudine a distruggere parte del glicosio normalmente in esso contenuto od aggiuntovi artificialmente. Ma si tratta di una attività molto limitata, tanto che il Pflüger [1] e molti altri autori non vollero ad essa attribuire importanza alcuna nei processi del ricambio degli idrati di carbonio.

È strano che un fenomeno così semplice e di facile riscontro, come dovrebbe essere quello della glicolisi, abbia invece provocato opinioni nettamente contradittorie, non soltanto per ciò che riguarda la sua interpretazione e la sua misurazione, ma persino per ciò che si riferisce alla sua reale esistenza.

Io non intendo riassumere qui la copiosa letteratura sull'argomento: rimando il lettore alle due importanti monografie del Lepine, « La glicolisi » « Il diabete », ove sono ampiamente sviluppati i capitoli riguardanti le sostanze che favoriscono od inibiscono tale fenomeno, le varie ipotesi chimiche sul destino del glicosio durante la glicolisi, ecc. ecc.

Mi limiterò a far cenno delle recentissime pubblicazioni di Spencer Melvin [2] e di Lindsay S. Milne [3], secondo le quali il sangue di bue, cane, gatto, cavallo non distrugge affatto nè il glucosio normalmente contenuto, nè

[1] Pflüger, *Glycogène*, Dic. Physiol. Richet. Paris, Masson.

[2] Biochemical Journal, vol. VI, pag. 422 (1912).

[3] Journal of Med. Research, vol. XXI, pag. 415 (1913).

quello artificialmente aggiunto. Se in qualche caso si riscontra una diminuzione nel potere riducente, ciò non è dovuto a distruzione dello zucchero ma semplicemente ad una sua condensazione, e con l'ebollizione con acido cloridrico si ottiene di nuovo il primitivo potere riducente.

Le conclusioni di questi autori non concordano con le esperienze contemporanee di Edelmann (1) (il quale però non si preoccupa della eventuale condensazione del glicosio), secondo il quale il sangue di cane normale *in vitro* si dimostra potentemente glicolitico specialmente nelle prime sei ore, e nelle 24 ore è capace di distruggere tutto il suo glicosio. Nei cani spancreatizzati tale potere si attenua, ed anche scompare dopo un certo tempo dall'operazione. Per ciò che riguarda l'influenza della spancreatizzazione è di parere diverso il Macleod (2), che ritiene essa non modifichi il potere glicolitico del sangue. Inoltre, secondo il Macleod che avrebbe riscontrato sempre il potere glicolitico del sangue, vi sono variazioni notevolissime, nei varî animali di una stessa specie, da individuo a individuo.

I pochi cenni dati bastano a dimostrare quanto incerta sia ancora la conoscenza sulla attività glicolitica del sangue.

Volendo indagare quale parte le si dovesse attribuire nella distruzione del glicosio osservata nelle mie esperienze sulla circolazione dei varî tessuti, e quali modificazioni tale attività glicolitica subiva nelle dette esperienze, era necessario di formarsi un personale concetto sull'argomento. Occorreva verificare, cioè, se il sangue possedeva l'attitudine di agire sul glicosio aggiunto nelle proporzioni stesse usate nelle mie esperienze, e, nella eventuale diminuzione del potere riducente, quanta parte si dovesse alla distruzione e quanta allo condensazione del glicosio.

***

Le mie esperienze vennero eseguite nel seguente modo:

Si estraeva da un'arteria il sangue che si defibrinava rapidamente; si aggiungeva glicosio in quantità tale da ridurre il sangue ad un tasso del 0,5 - 1 %; quindi si aggiungeva toluolo, e il tutto si portava in termostato a 38°, ovvero si teneva a temperatura-ambiente 15 - 20°. Quindi si prelevavano campioni di 10 - 15 cc. che si diluivano con sei volumi d'acqua distillata; si portava ad ebollizione e si aggiungevano tre volumi di soluzione di ferro colloidale al 5 %; si precipitava con carbonato di sodio e si filtrava. Dal filtrato, perfettamente limpido ed incoloro, si prelevavano 50 - 100 cc., sui quali si determinava il potere riducente col metodo di Lehmand-Emden (3).

(1) Biochemiche Zeit-crift, vol. XL, pag. 314 (1912).

(2) Journal Biol. Chem., vol. XV, pag. 497 (1913).

(3) In molte esperienze il potere riducente del campione appare alquanto inferiore a quanto ci si poteva attendere, sommando il potere riducente del glucosio aggiunto a

Per determinare poi quanta parte, nella eventuale diminuzione del potere riducente, si dovesse alla distruzione del glicosio, e quanta ad una sua sintesi, si ripeteva l'operazione con un corrispondente campione di sangue, previamente idrolizzato con HCl all' 1 %.

I. — Sangue cc. 100 + 1 gr. glicosio:

subito	10 cc. potere riducente	= 105.2	mgr.	glicosio
	10 cc. idrolizzato con HCl	= 107.4	»	»
dopo 3 ore	10 cc. potere riducente	= 96.6	»	»
	10 cc idrolizzato con HCl	= 104.7	»	»
dopo 6 ore	10 cc. potere riducente	= 95 5	»	»
	10 cc. idrolizzato con HCl	= 103.1	»	»
dopo 18 ore	10 cc. potere riducente	= 98.6	»	»
	10 cc. idrolizzato con HCl	= 99.8	»	»

II. — Sangue cc. 100 + ½ gr. glicosio:

dopo 3 ore	10 cc. potere riducente	= 52.2	»	»
	10 cc. idrolizzato con HCl	= 56.8	»	»
dopo 6 ore	10 cc. potere riducente	= 50.8	»	»
	10 cc. idrolizzato con HCl	= 56.1	»	»
dopo 12 ore	10 cc. potere riducente	= 49.6	»	»
	10 cc. idrolizzato con HCl	= 52 4	»	»
dopo 24 ore	10 cc. potere riducente	= 50.2	»	»
	10 cc. idrolizzato con HCl	= 50.8	»	»

III. — Sangue cc. 100 + 1 gr. glicosio:

dopo 2 ore	10 cc. potere riducente	= 100,0	»	»
	10 cc. idrolizzato con HCl	= 105.9	»	»
dopo 6 ore	10 cc. potere riducente	= 96.8	»	»
	10 cc. idrolizzato con HCl	= 104.2	»	»
dopo 12 ore	10 cc. potere riducente	= 98.9	»	»
	10 cc. idrolizzato con HCl	= 100.6	»	»

IV. — Sangue cc. 100 + ½ gr. glicosio:

subito	10 cc. potere riducente	= 49.8	»	»
	10 cc. idrolizzato con HCl	= 52.4	»	»
dopo 3 ore	10 cc. potere riducente	= 44.2	»	»
	10 cc. idrolizzato con HCl	= 52.1	»	»
dopo 6 ore	10 cc. potere riducente	= 46 4	»	»
	10 cc. idrolizzato con HCl	= 50.8	»	»

---

quello del glucosio preesistente. Ciò è dovuto al fatto che il sangue stesso veniva fatto circolare nell'apparecchio della circolazione artificiale (ove si diluiva leggermente con i residui di soluzione fisiologica rimasti dopo il lavaggio dell'apparecchio), dovendo un'altra parte del sangue stesso servire per la circolazione di organi sopravviventi.

dopo 12 ore { 10 cc. potere riducente = 45.8 mgr. glicosio
10 cc. idrolizzato con HCl = 40.2 » »

dopo 24 ore { 10 cc. potere riducente = 40.7 » »
10 cc. idrolizzato con HCl = 41.2 » »

V. — Sangue cc. 100 + 1 gr. glicosio:

dopo 2 ore { 10 cc. potere riducente = 98.1 » »
10 cc. idrolizzato con HCl = 105.4 » »

dopo 4 ore { 10 cc. potere riducente = 96.6 » »
10 cc. idrolizzato con HCl = 104.2 » »

dopo 10 ore { 10 cc. potere riducente = 96.8 » »
10 cc. idrolizzato con HCl = 99 8 » »

dopo 18 ore { 10 cc. potere riducente = 95.9 » »
10 cc. idrolizzato con HCl = 98.0 » »

VI. — Sangue 100 cc. + ½ gr. glicosio:

dopo 2 ore { 10 cc. potere riducente = 49.8 » »
10 cc. idrolizzato con HCl = 52.1 » »

dopo 4 ore { 10 cc. potere riducente = 45 9 » »
10 cc. idrolizzato con HCl = 51.4 » »

dopo 8 ore { 10 cc. potere riducente = 46.1 » »
10 cc. idrolizzato con HCl = 49.8 » »

dopo 21 ore { 10 cc. potere riducente = 42.9 » »
10 cc. idrolizzato con HCl = 44.0 » »

Dalle esperienze riferite risulta che:

1) Aggiungendo glicosio nelle proporzioni di 0,5 - 1 % a sangue di cane normale, e saggiandone quindi successivamente il potere riducente, si verifica che esso diminuisce in una misura abbastanza rilevabile.

2) La diminuzione del potere riducente del sangue contenente glicosio aggiunto, non si deve considerare come dovuta semplicemente ad una corrispondente distruzione di glicosio. Al contrario, nelle prime ore di esposizione al termostato non avviene od è scarsissima la distruzione del glicosio, e la diminuzione del potere riducente deve addebitarsi ad una modificazione dello stato chimico del glicosio, che permette però, in seguito ad idrolisi con HCl, la sua ripristinazione.

Io ritengo, per ragioni che in seguito esporrò (dopo aver riferito le ulteriori ricerche nelle quali il fenomeno si riscontra in una misura incommensurabilmente più elevata), che si tratti di una condensazione del glicosio. Però i dati riferiti nella presente Nota non permettono, per ora, di escludere l'ipotesi di una combinazione glicoproteica corrispondente al cosiddetto « sucre virtuel » del Lépine.

3. Continuando per 18-24 ore l'esperienza, diminuisce la quantità di tale glicosio condensato, tantochè i dosaggi del sangue, prima e dopo idrolisi con HCl, non diversificano così notevolmente fra di loro come nei precedenti periodi.

In alcune esperienze poi, dopo così lunga permanenza in termostato, si ha una discreta perdita effettiva di glicosio, mentre invece nelle prime 12 ore la distruzione reale del glicosio fu sempre assai lieve, inferiore al 5 % del complessivo contenuto. Siccome però è precisamente in questo periodo di lunga permanenza che più si può far sentire l'effetto di un inquinamento bacterico, difficile di sfuggire con la disposizione sperimentale necessariamente assunta nelle nostre esperienze, così ritengo prudente, per ciò che riguarda la glicolisi, di riferirmi ai dati raccolti nei periodi più brevi. Nelle prime 12 ore la diminuzione del potere riducente rimase sempre nei limiti della distruzione del glicosio proprio del sangue, per cui non possiamo affermare che del glicosio aggiunto sia stata distrutta una parte.

4. Ambedue i fenomeni avvertiti nelle nostre ricerche (condensazione e distruzione del glicosio) si svolsero in misura differente da caso a caso.

Se ora prendiamo a considerare il complesso dei nostri risultati, emerge che sono stati riscontrati i fenomeni osservati dai recenti studiosi, e che costituirono argomento per sostenere le più disparate opinioni rispetto al potere glicolitico del sangue. E cioè, è vero che nelle prime ore non avviene distruzione di glicosio, ma piuttosto condensazione; ma ciò non esclude che il sangue non possegga l'enzima glicolitico. Ed infatti prolungando l'esperienza si ottiene pure distruzione di glicosio per opera del sangue normale. Si tratta quindi di proprietà differenti, ambedue esistenti nel sangue normale, le quali manifestano con vece alterna la loro influenza.

E questo fenomeno (della coesistenza, in un medesimo liquido o tessuto dell'organismo, delle più opposte attitudini) è un fenomeno del quale ho già avuto più volte occasione di trattare, in ricerche riguardanti altri campi. Esso costituisce, io credo, una delle condizioni fondamentali colle quali l'organismo domina il suo metabolismo; per cui sarà opera sommamente utile il ricercarne, per quanto è possibile, le varie sue leggi e manifestazioni.

Fisiologia. — *I processi termici dei centri nervosi.* V: *Azione dei narcotici e della compressione meccanica sulla tonalità termica del preparato centrale di Bufo* (1). Nota di S. Baglioni, presentata dal Socio L. Luciani.

1. *Azione dei narcotici (etere solforico, alcool etilico, cloroformio, anidride carbonica).* — Come è noto, dalle classiche esperienze di Cl. Bernard in poi, uno dei mezzi migliori per stabilire la natura biologica di processi osservati in organismi o in organi sopravviventi, consiste nel saggiare quale influenza hanno su loro i narcotici generali. Fu, pertanto, anche questo uno degli argomenti, cui, nelle mie ricerche sulla produzione di calore del preparato centrale di Bufo, rivolsi l'attenzione.

Il metodo d'indagine, che mi parve più adatto a tale scopo, consisteva nell'insufflare nell'interno della camera umida, dopo che il preparato si era messo in equilibrazione termica, una corrente d'aria (o di ossigeno) umida, carica di vapori narcotici per avere attraversato un tubo di vetro racchiudente un batuffolo di cotone imbevuto di etere o di alcool o di cloroformio. Per far agire CO_2, immettevo una corrente di questo gas, proveniente da un apparecchio di Kipp, previo il solito lavaggio, nell'interno della camera umida. L'attenuazione o la scomparsa dell'eccitabilità riflessa era indice dell'azione narcotica sui centri. Usando questo metodo, dovevo facilmente attendermi dapprima una rapida e graduale discesa del galvanometro, dovuta al raffreddamento del preparato in seguito all'evaporazione promossa dalla corrente gasosa; dopo questa prima fase, cessata la corrente, il galvanometro, risalendo gradatamente, avrebbe dovuto indicare la tonalità termica del preparato in istato di narcosi.

I primi risultati ottenuti, coll'etere e coll'alcool, furono ben diversi da quanto supponevo. Appena giunti i primi vapori di queste sostanze nella camera umida, il galvanometro saliva rapidamente e fortemente per parecchie centinaia di divisioni, continuando a salire finchè durava la corrente gasosa, per poi, poco dopo l'interruzione di essa, tornare lentamente a discendere. Il calore che così rapidamente si produceva (spesso persino superiore a 0°,5) era dovuto a un fatto puramente fisico, ossia era il cosiddetto *calore di soluzione*, che si svolgeva mano mano che i vapori di etere e, in grado maggiore, di alcool, si dissolvevano nell'acqua del preparato e della camera umida. Infatti lo stesso aumento termico osservai dopo aver sostituito il preparato con un batuffolino di cotone imbevuto di soluzione fisiologica; potei, inoltre,

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Sassari.

direttamente stabilire un analogo rapido e forte aumento termico, sciogliendo una minima quantità di alcool in acqua distillata in presenza di un termometro Beckmann. Le esperienze fatte coi vapori di etere e di alcool non diedero, pertanto, risultati utilizzabili.

I vapori di cloroformio e l'anidride carbonica non producevano, invece, alcun aumento termico di soluzione durante il loro passaggio. Riferirò, quindi, alcuni dei risultati con essi ottenuti.

Esperienza XIX. 14 marzo 1916. — Preparato completo; quadratino di carta bibula con stricnina sulla faccia dorsale dell'*int. post.* O della batteria vuota, 890. Alle ore 15.25' adagio il preparato colla faccia ventrale sulla batteria di 8 coppie. Il galvanometro scende a 400; poi risale lentamente. Nella tab. I alcuni dati successivi.

Tabella I.

h. min' min''	Galvan.	Attività centrale	Temp. amb.	*Osservazioni*
15.29	750		16°.2	
» 32	1020			
» 33	1040			
» 37	1020	Ottimi riflessi.		
» 51	950	Tetani riflessi.		
» 53				Insufflo aria umida per 1'; scende al di sotto di 0, poi risale.
» 56	500			
» 57	590	Tetani spontanei.		
» 58	640			
16. 2	785	Tetani riflessi fortissimi.		
» 3	800	Convulsioni fibrillari.		Insufflo aria umida per 10'', carica di cloroformio; sceso sotto 400, poi risale.
» 5	770	Attività riflessa scomparsa.		
» 6	820			O_2 per 50''; sceso sotto 0, poi ris.
» 13	500			
17. 1	860	Ineccitabile.		

Esperienza XXIII. 16 marzo 1916. — Preparato completo normale con ottima attività riflessa. Alle ore 15.20' l'adagio colla faccia ventrale sulla batteria di 8 coppie Il galvanometro scende sotto 0; poi risale lentamente. Nella tab. II, alcuni dati successivi.

Tabella II.

h. min' min''	Galvan	Attività centrale	Temp. amb.	*Osservazioni*
15.31	650		15°.1	
» 36	675			
» 40		Ottimi riflessi durante il passaggio di CO_2; poi l'eccitabilità dimin. sino quasi a scomparire		Corrente di CO_2, per 3 min'. Galvanometro sceso a 100. Poi lentamente risale.
» 45	350			
» 48	540			
» 53	610			
» 57	640			
16. 4	640		15°.1	

Un'altra esperienza sull'azione di CO_2 fu la XXVI, riferita nella IV Nota precedente (pag. 701).

Questi dati dimostrano concordemente che *i narcotici* (*cloroformio* e CO_2) *deprimono la tonalità termica del preparato centrale così come deprimono ogni altra manifestazione biologica.*

2. *Azione della compressione meccanica.* — Un altro quesito mi parve meritare particolare studio, ossia gli effetti prodotti sul tono termico da urti meccanici. In precedenti Memorie (1) ho messo in rilievo, come proprietà caratteristica della sostanza centrale, l'enorme sensibilità a tal genere di stimoli inadeguati, che, per quanto lievi, provocano nei colpiti neuroni un generale e, perciò, disordinato eccitamento, seguìto per lo più da paralisi definitiva. Discutendo le probabili cause di questo comportamento, giunsi alla conclusione che tale sensibilità agli urti meccanici non dipende tanto da una speciale proprietà di struttura morfologica, quanto da proprietà di struttura chimica della sostanza centrale. Colle presenti ricerche mi proposi di vedere se la compressione, fatta con lungo bastoncino di vetro a punta smussa, producesse, insieme coi noti effetti funzionali, notevoli effetti sulla tonalità termica del preparato. Espongo i risultati ottenuti in due esperienze.

Esperienza XXII. 16 marzo 1916. — Preparato centrale completo normale di ♁ (0 del galvanometro vuoto 590). Alle ore 8.4′ lo adagio colla faccia ventrale sulla batteria di otto coppie. Il galvanometro sceso sotto 300, va poi risalendo. Nella tabella III alcuni dati successivi.

Tabella III.

h. min′ min″	Galvan.	Attività centrale	Temp. amb.	*Osservazioni*
8.10	520	Riflessi ottimi.		
» 19	675			
» 25	665			
» 27				Corrente di O_2 per 1′; scende a 700, poi risale.
» 31	550			
» 40	650			
» 41.30	670	Idem.		
» 44	680			
» 45		Fortissimi tetani durante la compressione.		Apro e comprimo rapidamente l'*int. post.* Il galvanom. scende a 600; poi, dopo richiusa la camera umida, risale subito a 650.
» 46.30	680			
» 47	690			
» 47.30	700			
» 48	710			
» 49	725			
» 52	750		15°.0	
» 54	750			
9.16	780			
» 50	710		15°.0	
» 52		Nessuna reazione.		Comprimo ancora e più di prima. Sceso a 620.
» 53 30	650			
» 56	670			
10. 2	705			
» 14	715		15°.0	
» 15	710			
» 46	740			

(1) Cfr. specialmente S. Baglioni, *L'eccitabilità diretta dei centri nervosi agli stimoli artificiali.* Zeitschr. f. allg. Physiol. V, 1909, pp. 87-136.

Esperienza XXVIII. 24 marzo 1916. — Preparato centrale completo normale di ♂ (O del galvanometro vuoto 500) Alle ore 8.35′ lo adagio colla faccia ventrale sulla batteria di cinque coppie. Il galvanometro sceso sotto 0, risale poi lentamente, chiusa la camera umida. Nella tab. IV alcuni dati successivi.

TABELLA IV.

h. min′ min″	Galv.	Attività centrale	Temp. amb.	*Osservazioni*
9.15	250	Vivacissimi moti spontanei e riflessi, 255.		
» 18	260			
» 32	300	Riflessi vivacissimi, 305.		
» 35	310			Aperto il circuito, il galvanom. sale a 370.
» 37	315	Vivacissimi moti spontanei.	15°.7	
» 42	330	Idem.		
» 48	360			Corrente di O_2 per 30″; sceso a 150.
» 56	425			Aperto il circuito, scende a 360.
» 59	428	Vivaci e continui moti riflessi e spontanei.	15°.8	
10. 0	430			
» 2	435	Tetani violentissimi durante la compressione.		Tocco rapidamente con bastoncino di vetro l′*int. post.* Il galvanometro sceso a 410.
» 4	415			
» 5	422			
» 5.30	430			
» 6.30	440	Riflessi ancora vivaci.		
» 7				Corrente di O_2 per 20″; sceso sotto 0.
» 10	270			
» 16.30	465		15°.8	
» 19	470			
» 20	475			
» 41	480	Ottimi riflessi.		
» 44	470		15°.8	Aperto il circuito, scende a 370.
» 46	470	Tetani durante la compressione		Comprimo ripetutamente bulbo e l′intero midollo. Sceso a 460.
» 47.30	450			
» 48	455			
» 49	460			
» 51	480			
» 53	495		16°.0	
» 54	500			
» 56	505			
» 58	505			
11. 0	505			
» 2	502		16°.0	
» 4	502			
» 8	502			
» 11	502	Eccitabilità riflessa scomparsa.	16°.0	
» 13	500			
» 15	499		16°.05	
12. 3	480		16° 1	
» 5	470			

Da questi dati risulta che la brusca compressione meccanica, quando è tale da provocare immediato eccitamento generale e successiva scomparsa di ogni attività centrale, per grave ed irreparabile lesione degli elementi, produce anche un evidente aumento del tono termico del preparato. Infatti

nell'esp. XXII la prima compressione, che provocò fortissimi tetani e ineccitabilità, produsse (prescindendo dal raffreddamento iniziale dovuto all'evaporazione promossa dall'apertura della camera umida per introdurre il bastoncino di vetro) una ascesa graduale del galvanometro, che raggiunse, dopo 31', un massimo di + 100 divisioni sul valore di partenza, pari a + 0°,05. La seconda compressione, che, sebbene più forte, non provocò alcuna reazione centrale, non produsse invece veruna modificazione termica manifestamente positiva.

Nell'esp. XXVIII, la prima lieve e rapida compressione dell'*int. post*, che provocò eccitamento generale ma non paralisi dei centri colpiti, non produsse che un lieve aumento della produzione termica dovuto, probabilmente, soltanto ai processi metabolici dell'attività centrale. La seconda compressione, più energica ed estesa all'intero preparato, che provocò tetani immediati e successiva paralisi, fu seguìta, invece (a prescindere dall'abbassamento immediato per evaporazione), da una notevole elevazione che raggiunse, dopo 10', un massimo di 35 divisioni (pari a + 0°,0315), dopo il quale lentamente declinò.

Nell'esp. XXII nessuna variazione avvenne nella temp. amb.; nell'esp. XXVIII ne avvenne una lieve, di + 0°,3. Di modo che le rilevate variazioni termiche delle batterie termoelettriche possono, senza tema d'errare, riferirsi a processi intrinseci del preparato.

L'aumento termico così dimostrato seguire a brusco ed energico urto, potrebbe però essere interpretato, non tanto come effetto primario, quanto come effetto secondario della compressione. Potrebbe, cioè, essere riferito ai processi metabolici di attività abnormemente eccitata (tetani), dal violento stimolo meccanico, come abbiamo visto nelle precedenti Note essere realmente il caso nell'ipereccitamento prodotto da stricnina.

Certamente credo che al descritto riscaldamento da compressione contribuiscano anche i processi catabolici, ma non mi pare che essi ne siano la esclusiva e più rilevante causa.

Difficile è indubbiamente separare questi effetti secondarî da altri primarî. Tuttavia, avendo visto, nell'esp. XXVIII, che una lieve compressione, che provoca eccitamento generale senza paralisi, non produce un così notevole aumento termico come una più forte compressione seguìta da eccitamento e da paralisi, mi sembra legittimo concludere che *la compressione meccanica produce sviluppo di calore determinando, oltre ai processi catabolici, abnormi ed irreversibili alterazioni nella complessa e delicata costituzione chimica degli elementi centrali, alterazioni che sono accompagnate da processi esotermici.*

Questo fatto mi sembra, d'altra parte, una valida ed interessante conferma dell'ipotesi che la speciale sensibilità dei centri agli urti meccanici dipenda, più che da proprietà della loro struttura morfologica, da proprietà della loro struttura chimica.

Matematica applicata. — *Della volgarizzazione ed applicazione della fisica-matematica in medicina* (1). Nota II del prof. S. Salaghi, presentata dal Socio A. Ruffini.

Dopo la Nota pubblicata nel 1912 in questi Rendiconti della r. Accademia dei Lincei (2), ho proseguito nell'opera di volgarizzazione della fisica-matematica ad uso dei medici. Allora mi ero occupato delle applicazioni della idrodinamica alla circolazione del sangue (*emodinamica*). Questa volta ho reso in forma intelligibile ai medici un problema di acustica fisiologica, che io per primo ho trattato: *Delle vibrazioni sonore in rapporto con la conformazione dell'organo dell'udito nell'uomo*. Per farmi intendere, però, non ho potuto, come è naturale, conservare il linguaggio proprio dei matematici; ma ho usato alcune espressioni che, se non corrispondono interamente alla tecnica matematica, pure servono a rendere chiaro ai profani il significato di certe formule. A rettificazione per i cultori delle matematiche, credo ora opportuno di dare un cenno della base teorica del mio lavoro.

Nello svolgimento del tema ebbi a guida principalmente i due elementi essenziali di ogni movimento: forza viva e resistenza. Sotto tale aspetto non erano ancora stati studiati gli argomenti di acustica fisiologica.

Rispetto alla energia cinetica dei corpi vibranti, poco finora si sapeva di positivo. Nell'esporre una sua teoria della audizione, lo Knile, è vero, aveva mostrato che questa energia, a parità di altre condizioni, doveva ritenersi eguale indistintamente per i suoni acuti e per i gravi (3). Egli però aveva considerato unicamente l'energia totale posseduta dal corpo vibrante. Rimaneva tuttora da conoscersi il lato più importante per la fisiologia dell'udito, cioè quanta parte della energia totale venga emessa individualmente dalle vibrazioni: in altri termini, la modalità nell'estrinsecarsi della energia. È presumibile che essa varii secondo la frequenza delle vibrazioni stesse, tenuto

(1) Lavoro fatto nel laboratorio di terapia fisica della r. Università di Bologna.

(2) Rendiconti della r. Accademia dei Lincei, classe di scienze fisiche matematiche e naturali, vol. XXI, serie 5ª, 2° sem., fasc. 1°, luglio 1912.

(3) L'energia è il quadrato del prodotto di n (numero delle vibrazioni) per A (loro ampiezza): è n^2A^2. Sussiste, per es., l'eguaglianza

$$Kn^2A^2 = K\,64\,n^2 \times \frac{A^2}{64},$$

benchè il tono, che è raffigurato nel secondo membro della equazione, sia di tre ottave più alto del tono a cui si riferisce il primo membro. Il variare dei toni non ha dunque influenza.

presente il modo con cui queste si susseguono. Da principio hanno la massima ampiezza ed energia; poi vanno a mano a mano indebolendosi, finchè cessano. Il loro estinguersi graduale dalla parte degli acuti, nell'unità di tempo, si compie con moltissime oscillazioni di piccola ampiezza iniziale; dalla parte dei bassi con poche oscillazioni, ma dotate di notevole ampiezza e durata. L'ampiezza iniziale è l'inversa della frequenza.

Per verificare l'esattezza di questa ipotesi, ricorsi al metodo sperimentale, che nel caso presente era la via migliore da seguire per i medici. Feci a tal fine costruire un nuovo modello di sonometro (1). I tipi ordinarî non potevano soddisfare alle condizioni richieste dalle esperienze. In quell'istrumento v'è di speciale che la forza con cui sono percosse le singole corde metalliche, accordate a toni acuti o a gravi, è costante. Inoltre lo smorzamento dei suoni vi è ottenuto e graduato per mezzo di pesi, che scendono sulle corde appena percosse: essi rappresentano la resistenza che conviene opporre per fermarne la vibrazione (2).

Dalle esperienze iustituitevi è risultato che, a scendere dai toni acuti verso ai gravi, l'energia che viene emessa individualmente dalle vibrazioni di fronte all'ostacolo offerto dai pesi, vale a dire il lavoro che possono compiere, ad ogni nuova ottava si raddoppia (3). Crescerebbe dunque, dagli acuti ai gravi, in progressione geometrica di ragione due; o almeno ne mostra la tendenza. Secondo la stessa progressione geometrica di ragione due cresce, già si sa, di ottava in ottava pure la frequenza delle vibrazioni. La progressione però vi procede in verso contrario, ossia sale dai gravi agli acuti. Le due funzioni (frequenza e valore cinetico individuale) delle vibrazioni sono dunque tra loro inversamente proporzionali.

Da queste esperienze resta giustificata la distinzione, già da noi intravveduta, tra l'energia *totale* delle vibrazioni prese collettivamente e quella parte di energia che *individualmente* possono sviluppare contro una data resistenza. La prima, secondo la dimostrazione di ter Kuile, è costante per ogni grado ed ottava della scala. La seconda, che rappresenta (per dir così) la modalità nell'estrinsecarsi della energia, varia, secondo le nostre esperienze, in ragione inversa della altezza dei toni. Da ora in avanti, per brevità, come energia delle vibrazioni intenderemo quella che esse emettono individualmente. Questo intanto è un primo elemento qui acquisito per lo svolgimento del tema.

(1) S. Salaghi, *Nuovo sonometro per lo studio di fenomeni acustici*. Gazzetta degli ospedali e delle cliniche, n. 132, an. 1914.

(2) Il meccanismo per la percussione delle corde metalliche vi è fatto sul principio di quello che è usato nei pianoforti. Viene così esso pure a partecipare dell'alto grado di perfezionamento a cui è giunta la costruzione di simili istrumenti.

(3) S. Salaghi, *Sullo smorzamento dei suoni di differente altezza* (studio sperimentale, con 3 figure). Bullettino delle scienze mediche, n. 12, an. 1914.

Il secondo quesito proposto allo studio era di esaminare la perdita di carico a cui vanno soggette le vibrazioni acustiche a cagione della resistenza che incontrano nell'organo dell'udito nell'*uomo*. Prima però di venire a questa parte, è necessario di dare qualche cenno di anatomia, ciò che farò in calce (1). Di più v'è da determinare la specie della spirale che descrive il tubo ad asse spirale costituente la chiocciola umana.

Esaminando i preparati di chiocciola umana, che si trovano nel Museo anatomico dell'Università di Bologna, osservai che, a partire dal vertice della chiocciola (polo della spirale), la distanza tra le spire ad ogni giro si raddoppia. Con questo dato anatomico esaminai le diverse spirali: spirale di

(1) L'apparecchio periferico del senso dell'udito si trova nell'orecchio interno, racchiuso entro la chiocciola (fig. 1). Questa è costituita da un tubo osseo ritorto a forma

Fig. 1. — La chiocciola umana aperta. — Figura pittorica (Sappay)

di spirale. Vi si considera una base nella parte più espansa ed un apice all'altra estremità assottigliata. Il tubo, lungo il suo decorso, è diviso in due canali simmetrici da un setto in parte osseo, in parte membranoso (*membrana basilare*) Sopra la parte membranosa del setto è disteso, allineato a mo' di tastiera seguendo l'andamento delle spire, l'organo senziente periferico (del Corti), a cui fanno capo le fibre terminali del nervo addetto al senso dell'udito (nervo *cocleare*). Ambedue i canali ossei simmetrici, al loro inizio dalla base della chiocciola, hanno una apertura rivestita di membrana flessibile e sono ripieni di liquido, detto labirintico. Queste due aperture rivestite di membrana, chiamate finestra rotonda e finestra ovale, sono le uniche parti cedevoli del sistema. Le vibrazioni sonore, dopo avere percorso l'orecchio esterno ed il medio, colpiscono una di quelle membrane agitando il liquido interno. Esso è libero di spostarsi in grazia alla controapertura che si trova, di là dal setto, nell'altro canale. Il moto vibratorio deve quindi farsi strada attraverso il setto membranoso ed il soprappostovi organo del Corti, il quale ne resta scosso e stimolato. Onde ha origine l'impressione sensoriale periferica dei suoni.

Il setto membranoso, membrana basilare, è di struttura fibrillare. Le fibre che sono disposte nel senso trasverso sono molto robuste, tese come corde. Secondo la teoria originaria dell'Helmholtz, esse funzionerebbero a guisa di tanti risuonatori per l'analisi dei suoni. La membrana sostiene inoltre il carico dell'organo del Corti e, insieme, le sue parti di

Archimede, parabolica, logaritmica (detta di Cartesio), iperbolica; e potei dedurre che il tubo osseo cocleare segue l'andamento della spirale logaritmica, o almeno ne mostra la tendenza. Questa spirale in coordinate polari è espressa da

(I) $$\varrho = e^{a\omega}.$$

Data la condizione $\varrho_2 - \varrho_1 = 2$, $\varrho_3 - \varrho_2 = 4$ ecc., si ha $a = 0{,}11$, $e^a = 1{,}116$. L'equazione diventa

(II) $$\varrho = \{1{,}116\}^{\omega}.$$

sostegno. Per tutto ciò prevale ora tra gli scrittori l'opiuione che essa realmente sia troppo resistente per vibrare sotto l'azione delle onde sonore; vibrerebbero invece altre parti sovrastanti, restando essa immobile. Senza entrare nel dibattito, mi basta di rilevare il fatto che il mezzo di propagazione delle onde sonore dall'una all'altra apertura o finestra del tubo cocleare, attraverso il setto, è, relativamente, molto resistente. Non è come il caso in cui si trattasse semplicemente di un liquido.

Avvertasi che il tubo osseo cocleare, originato alla base dell'organo, a livello delle due finestre, non passa subito a formare i giri cocleari visibili nella fig. 1. Per un certo tratto decorre celato sotto altre parti (promontorio). La curva che allora descrive è dolce e, da principio, irregolare (fig. 2). Questa porzione iniziale, lunga mm. 9, fu descritta per

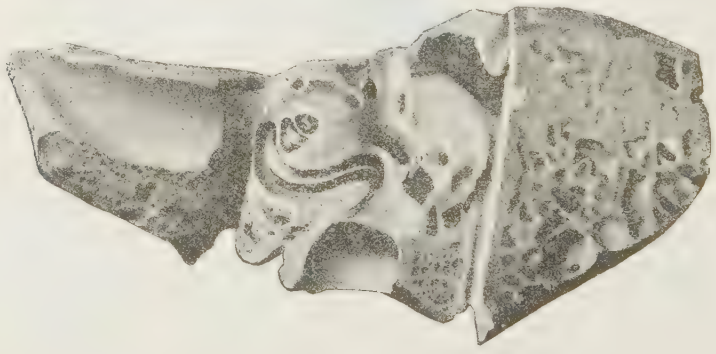

Fig. 2. — Decorso della porzione sigmoidea del canale osseo cocleare.
Ingrandimento due volte dal vero (Ruffini)

La porzione sigmoidea si trova distesa circa nel centro del preparato, ove se ne distingue bene la forma ad S italica. Nella prima parte a destra forma un gomito, in cui la curva spirale va in verso contrario al suo andamento regolare. Nel resto del decorso a sinistra la curvatura è molto lieve in confronto di quella dei giri cocleari visibili al disopra della sua estremità a sinistra.

la prima volta, nel 1902, dal prof. A. Ruffini, attuale direttore dell'Istituto di istologia e fisiologia generale nella Università di Bologna, a da lui distinta col nome di *porzione sigmoidea* per la sua forma ad S italica [A. Ruffini, *La cassa del timpano, il labirinto osseo e il fondo del condotto auditivo interno nell'uomo adulto*. Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie, Bd. LXXI, H. 3 (1902). Il lavoro vi fu pubblicato in italiano].

In questo caso, procedendo in direzione del polo, il raggio vettore, la lunghezza delle spire, il raggio di curvatura variano da spira a spira in progressione geometrica di ragione $\frac{1}{2}$; di ragione 2, all'opposto, la curvatura.

È da osservare che la chiocciola non rappresenta una figura piana, ma è un corpo a forma di cono. Il tubo osseo cocleare, procedendo dalla base della chiocciola al vertice, descrive una spirale che potrebbe chiamarsi *conica-logaritmica*. La vera spirale logaritmica ne è la proiezione nel piano. In conseguenza l'equazione (II) si trasforma in

$$\text{(III)} \qquad \varrho \sin \alpha = \{1{,}116\}^{\omega},$$

in cui α è l'angolo di apertura del cono. Assumendo come dati della chiocciola umana, per l'altezza, mm. 4, per il diametro della base mm. 8, e come origine delle coordinate il vertice del cono, l'angolo α risulta di 45°. Siccome $\sin 45° = 0{,}707$, $\frac{1}{\sin 45°} = 1.414$, l'equazione precedente diviene

$$\text{(IV)} \qquad \varrho = 1{,}414\{1{,}116\}^{\omega},$$

in cui ai valori iniziali della equazione (II) si è aggiunto un fattore costante [1].

Chimica fisica. — *Ricerche sulla velocità di scissione del lattosio per azione del « fermento bulgaro »* [2]. Nota I di G. Quagliariello e C. Ventura, presentata dal Corrispondente Filippo Bottazzi.

È noto che il « fermento bulgaro » ha la proprietà di invertire lo zucchero di latte, e di trasformare poi i due prodotti di scissione (glicosio e galattosio) in acido lattico, con formazione contemporanea di tracce di acidi succinico, acetico e formico. Ora noi abbiamo voluto studiare la velocità con cui la detta trasformazione avviene.

Le ricerche sono state fatte sul latte, sul siero di latte e su soluzione pura di lattosio. In quest'ultimo caso lo zucchero era sciolto in liquido di Ringer contenente 1 % di peptone, aggiunto per offrire ai bacilli un opportuno terreno di cultura

Per seguire la velocità di trasformazione dello zucchero, ci siamo serviti del metodo titrimetrico. Il latte, o il siero di latte, o la soluzione di lattosio, distribuiti in tubi da saggio, venivano opportunamente sterilizzati,

(1) S Salaghi, *La teoria della spirale logaritmica applicata all'apparecchio cocleare*. Archivio italiano di otologia, rinologia e laringologia, 1916, fasc. 1°.

(2) Ricerche eseguite nell'Istituto di fisiologia della r. Università di Napoli.

Tabella II.

Tempo in ore	Acidità								
	Latte intero			Siero di latte			Soluzione di lattosio		
	espressa in cc. Na OH 0,1 *n* per 10 cc. di latte		espressa in gr. eq. per litro (corretta)	espressa in cc. Na OH 0,1 *n* per 10 cc. di siero		espressa in gr. eq. per litro (corretta)	espressa in cc. Na OH 0,1 *n* per 10 cc. soluzione		espressa in gr eq. per litro (corretta)
	trovata	corretta del valore iniziale		trovata	corretta del valore iniziale		trovata	corretta del valore iniziale	
0	1,60	—	—	2,05	—	—	0,5	—	—
24	17,75	16,15	0,1615	10,45	8,40	0,0804	1,35	1,30	0,0130
48	24,30	22,70	0,2270	15,00	12,95	0,1295	1,65	1,60	0,0160
96	28,20	26,60	0,2660	16,60	14,55	0,1455	2,20	2,15	0,0215
120	29,25	27,25	0,2725	17,05	15,00	0,1500	2,35	2,30	0,0230
144	—	—	—	—	—	—	2,80	2,75	0,0275

Innanzi tutto, abbiamo creduto utile di porre in grafica i valori trovati, sia per aver un'idea complessiva dell'andamento del fenomeno, sia per

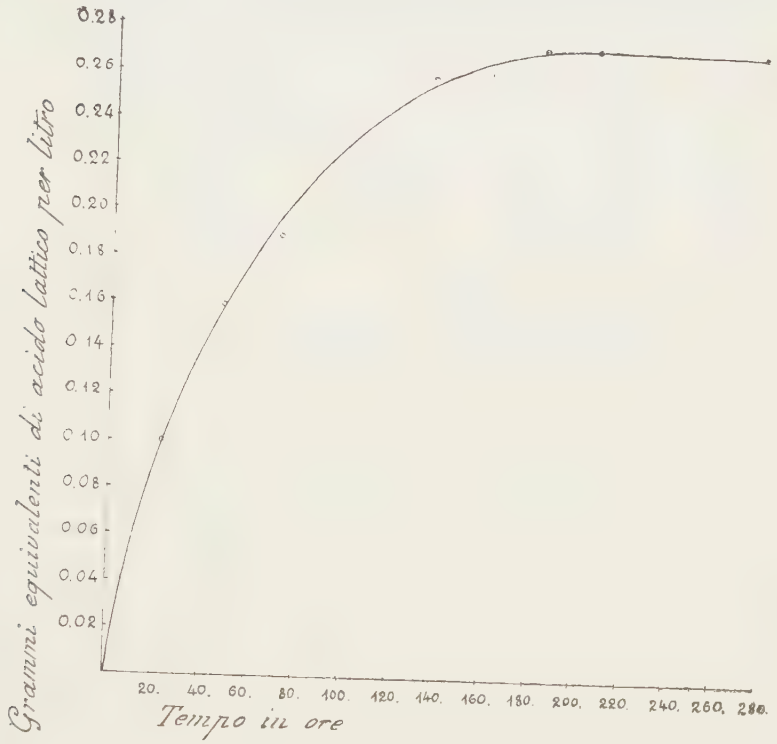

Fig. 1.

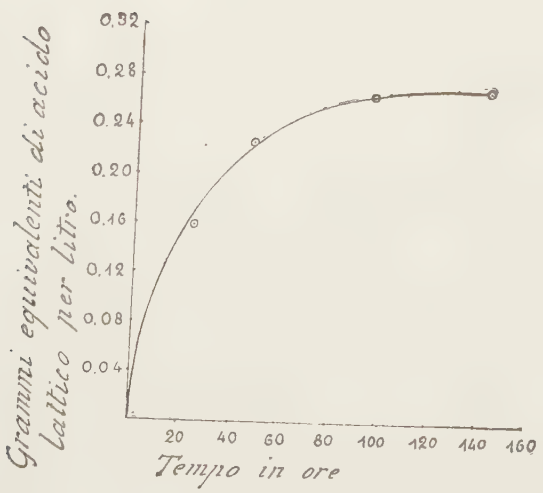

Fig. 2.

poter eliminare dal calcolo successivo l'errore sperimentale. Come mostrano le grafiche I-IV, costruite segnando sulle ascisse i tempi e sulle ordinate

le quantità di acido formato, i valori sperimentali, specie per il latte e per il siero di latte, stanno benissimo nella curva; il che dimostra che l'errore della determinazione titrimetrica fu relativamente piccolo. Per la soluzione di lattosio l'errore fu un po' maggiore. a causa della piccolissima quantità

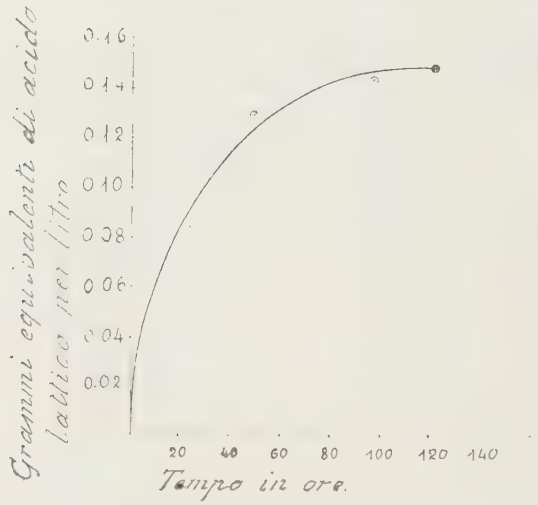

Fig. 3.

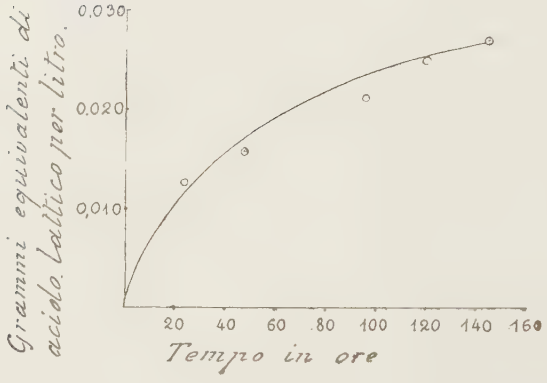

Fig. 4.

di acido formato. Dalle grafiche abbiamo ricalcolato la quantità di acido formato e la quantità di lattosio scisso nei singoli esperimenti, per intervalli di 20 ore. Dai valori esposti nella tabella III, dai quali è eliminato, dunque, per quanto è possibile, l'errore sperimentale, cercheremo di ricavare la legge della velocità di scissione del lattosio per opera del « bacillo lattico ».

Tabella III.

Tempo in ore	Latte (*a*) (concentraz. lattosio = 0,090 *n.*)		Latte (*b*) (concentraz. lattosio = 0,130 *n.*)		Siero di latte (concentraz. lattosio = 0,131 *n.*)		Soluzione di lattosio (concentraz. lattosio = 0.131 *n.*)	
	Gram. equiv. per litro		Gram. equiv. per litro		Gram. equiv. per litro		Gram. equiv. per litro	
	$C_3H_6O_3$ formato	$C_{12}H_{22}O_{11}$ scisso	$C_3H_6O_3$ formato	$C_{12}H_{22}O_{11}$ scisso	$C_3H_6O_3$ formato	$C_{12}H_{22}O_{11}$ scisso	$C_3H_6O_3$ formato	$C_{12}H_{22}O_{11}$ scisso
0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0,090	0,0225	0,146	0,0385	0,090	0,0225	0,0060	0,0015
40	0,141	0,0352	0,209	0,0522	0,114	0 0285	0,0110	0,0028
60	0,178	0,0445	0,242	0,0605	0,133	0,0332	0,0155	0,0038
80	0,207	0,0515	0,260	0,0650	0,144	0,0360	0,0195	0,0048
100	0,229	0,0572	0,268	0,0670	0,149	0,0372	0,0225	0,0056
120	0,246	0,0615	0,272	0,0680	0,150	0,0375	0,0255	0,0064
140	0,259	0,0647	—	—	—	—	0,0270	0,0067
160	0,268	0,0670	—	—	—	—	—	—
180	0,273	0,0682	—	—	—	—	—	—
200	0,275	0,0687	—	—	—	—	—	—
220	0,276	0,0690	—	—	—	—	—	—

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich richiama l'attenzione dei Colleghi su varie pubblicazioni dei Soci Taramelli, Parona, Pascal, Peano, Sacco, Silvestri; fa poscia omaggio del vol. VI, parte 2ª ed ultima delle *Memorie ed osservazioni del R. Osservatorio al Collegio Romano*, ed offre, discorrendone, a nome dell'autore, due volumi contenenti le pubblicazioni del prof. Palazzo di magnetismo terrestre e di argomenti varî, apparse nell'intervallo 1884-1914.

Il Socio Reina, a nome della Presidenza della Società italiana per il progresso delle scienze, presenta un volume contenente una serie di conferenze riguardanti: *La chimica e le industrie chimiche in Italia nel momento attuale.*

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Lombardi L. *Ricerche intorno ai solenoidi composti di materiale magnetico.* Pres. dal Corrisp. G. Grassi (1).

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente Blaserna annuncia che alla seduta assiste il prof. Vassilief, docente dell'Università di Pietrogrado; e al chiaro scienziato porge il saluto cordiale dell'Accademia.

Lo stesso Presidente comunica una lettera del Socio straniero Mittag-Leffler che, unitamente a sua moglie, annuncia di aver destinato, in occasione del suo 70° compleanno, la propria biblioteca, la villa di Djursholm e quanto possiede, ad una istituzione internazionale per le matematiche superiori. Il Presidente propone, e la Classe approva, che al prof. Mittag-Leffler siano trasmessi i sensi di compiacimento dell'Accademia per la generosa e munifica disposizione.

E. M.

(1) Presentata nella seduta del 21 maggio 1916.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 giugno 1916.

Berger E. — Zur Geschichte eines optischen Instrumentes, mit 2 Abbildungen, II Auflage. Bern, 1916. 8°; pp. I-VII, 1-20.

Chimica (la) e le industrie chimiche in Italia nel momento attuale (Società italiana per il progresso delle scienze). Roma, 1916. 8°. pp. 1-54.

Malenotti E. Sopra un caso di endofagia dell' « Aspidiotiphagus citrinus » (Craw.) How. sul « Chrysomphalus dictyospermi » (Morg.) Leon. (Estr. dal « Redia », vol. XII, pp. 1-18). Firenze, 1916. 8°.

Millosevich E. — Memorie ed Osservazioni, ser. III, vol. VI, parte II. Roma, 1916. 4°; pp. I-VII, 1-223.

Ortu Carboni S. — Trattato di matematica finanziaria. Milano, 1916. 8°; pp. I-XVI, 1-347.

Palazzo L. — Pubblicazioni, an. 1884-1914: *A*) Magnetismo terrestre; *B*) Argomenti diversi.

Parona C. F. — Francesco Bassani: cenno necrologico. (Estr. dagli « Atti della r. Accad. delle scienze di Torino », vol. 51°, pp. 1-8). Torino, 1916. 8°.

Pascal E. — Le linee funzioni di linee. (Estr. dal « Giornale di matematica del Battaglini, vol. 53, pp. 1-31). Napoli, 1915. 8°.

Peano G. — Le definizioni per astrazione. (Estr. dal « Boll. della Mathesis » 1915, pp. 1-15). Pavia, 1915. 8°.

Peano G. — Residuo in formula de quadratura Cavalieri-Simpson. (Extr. de l' « Enseignement mathématique », 1916, pp. 124-129) Paris, 1916. 8°.

Sacco F. — Apparati dentali di « Labrodon » e di « Chrysophrys » del pliocene italiano. (Estr. dagli « Atti della r. Accad. delle scienze di Torino », vol. LI, pp. 1-8). Torino, 1916. 8°.

Sacco F. — Considérations cosmogoniques sur la nebuleuse M. 51 Canum Venaticorum. (Estr. da « Saggi di astronomia popolare », anno V, pp. 1-11). Torino, 1915. 8°.

Sacco F. — Geologia applicata della città di Torino. (Estr. dalla Rivista « il Valentino », anno V, pp. 1-62). Torino, 1915. 8°.

Sacco F. — Il pozzo artesiano di Saluggia. (Estr. dagli « Annali della r. Accad. di agricoltura di Torino », vol. 58, pp. 1-8). Torino, 1916. 8°.

Sacco F. — La geologia e la guerra. (Estr. da « Saggi di astronomia popolare », an. VI, pp. 1-27). Torino, 1916. 8°.

Sacco F. — Universo. Torino, 1916. 8°, pp. 1-306.

Silvestri F. — Descrizione di alcuni tisanuri indo-malesi. (Estr. dal « Boll. del laboratorio di zoologia generale », vol. XI, pp. 1-119). Portici, 1916. 8°.

Silvestri F. — Thysanura della nuova Caledonia e delle isole Loyalty. (Estr. dalla « Nova Caldonia, Zoologie », vol. II, pp. 75-81). Wiesbaden, 1915. 8°.

Taramelli T. — Di Giovanni Maironi da Ponte e di altri naturalisti bergamaschi del secolo scorso. (Estr. dai « Rendiconti del r. Istit. lombardo di scienze », vol. 49, pp. 289-284). Milano, 1916. 8°.

Taramelli T. — In morte di Ferdinando Sordelli. (Estr. dai « Rendiconti del r. Istituto lombardo di scienze », vol. 49, pp. 1-4). Milano, 1916. 8°.

Terradas E. — Els elements discrets de la materia i la radiació: conferencias recullides per I. Polit. Barcelona, 1916. 8°, pp. 1-68.